Aufgabe 1 (*Maxwell-Gleichungen*)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ die 1-Form $A = A_0\, dt + \sum_{i=1}^3 A_i\, dx^i$. Seien $E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

$$dA = -\sum_{i=1}^{3} E^i\, dt \wedge dx^i + \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} B^i\, dx^{\hat{i}}$$

definiert. Folgern Sie aus $d^2 A = 0$ folgende zwei (von insgesamt vier) Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{div}(B(t_0, \cdot))(x_0) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t}(t_0, x_0) + \operatorname{rot}(E(t_0, \cdot))(x_0) = 0.$$

Hier sind $dx^{\hat{1}} = dx^2 \wedge dx^3, dx^{\hat{2}} = dx^1 \wedge dx^3, dx^{\hat{3}} = dx^1 \wedge dx^2$, und für $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot}(Y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot}(Y)(x) := (+\frac{\partial Y^2}{\partial x^3}(x) - \frac{\partial Y^3}{\partial x^2}(x), -\frac{\partial Y^1}{\partial x^3}(x) + \frac{\partial Y^3}{\partial x^1}(x), -\frac{\partial Y^1}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial Y^2}{\partial x^1}(x)),$$

und $\operatorname{div}(Y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{div}(Y)(x) := \frac{\partial Y^1}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial Y^2}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial Y^3}{\partial x^3}(x).$$

Aufgabe 2 (*Definition der äußeren Ableitung*)
Für $\omega \in \Omega^l(M)$ und Vektorfelder $X_0, X_1, \dots, X_l \in C^\infty(TM)$ sei

$$\begin{aligned} T(X_0, \dots, X_l) &= \sum_{j=0}^{l} (-1)^j\, X_j(\omega(X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_l) \\ &+ \sum_{0 \le j < k \le l} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_l), \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\dots}$ bedeutet, dass der Eintrag wegzulassen ist.

(i) Zeigen Sie, dass T in $X_0, \dots, X_l$ linear über $C^\infty(M)$ und alternierend ist.

(ii) Folgern Sie durch Nachrechnen bzgl. der Basisfelder einer Karte, dass gilt: $T(X_0, \dots, X_l) = d\omega(X_0, \dots, X_l)$.

Aufgabe 3 (*Pullback Formel*)
Sei ω eine diff. n-form auf eine n-dim. diff. Mannigfaltigkeit M^n. Seien $\phi : U \to \phi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten, und

$$\omega = f\ {}^{\phi}dx^1 \wedge {}^{\phi}dx^2 \wedge \ldots \wedge {}^{\phi}dx^n,$$

auf U, und

$$\omega = \tilde{f} \quad {}^{\psi}dx^1 \wedge {}^{\psi}dx^2 \wedge \ldots \wedge {}^{\psi}dx^n,$$

auf V ($f : U \to \mathbb{R}$ und $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ C^∞ funktionen). Dann gilt $f(x) = \tilde{f}(x)\det(A(x))$, für alle $x \in U \cap V$, wobei $(A(x))_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ eine $n \times n$ Matrix ist mit Einträgen $(A(x))_{ij} = \frac{\partial(\psi^i \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi(x))$.

Aufgabe 4 (*Vektor Bündel*)
Sei $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung der diff. Mannig. M^n und für all $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, seien $A_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(k, \mathbb{R})$ differenzierbaren Abbildungen, die die *Kozykelbedingungen* erfüllen (siehe Bemerkung 6.19 von der Vorlesung). Sei

$$E := (\cup_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha \times \{\alpha\} \times \mathbb{R}^k)/\sim,$$

wobei $(p, \alpha, v) \sim (q, \beta, w) \iff p = q$ und $A_{\alpha\beta}(p)w = v$ ($\sim$ ist eine Äquivelenzrelation mit Äquivelenzklassen $[(p, \alpha, v)] := \{(q, \beta, w)|(q, \beta, w) \sim (p, \alpha, v)\}$). Sei $\pi : E \to M$, durch $\pi([p, \alpha, v]) = p$ definiert. Zeigen Sie: es existieren Abbildungen $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, so dass $\pi : E \to M$ ein $k - dim.$ Vektorbündel über M ist mit Bündelkarten ψ_α, und $A_{\alpha\beta}(p) = A^{\psi_\alpha}(p) \circ (A^{\psi_\beta}(p))^{-1}$, wobei $A^{\psi_\alpha}(p)$, wie in Definition 6.17 der Vorlesung sind,

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 17.1.2006 bis 11:15.