Aufgabe 1 (*Orientierung von S^n*)
Sei $\sigma : S^n \to \cup_{p\in M} Bas_0(T_pS^n)$ durch $(v_1,\dots,v_n) \in \sigma(p) \iff (p, v_1,\dots,v_n) \in Standard(\mathbb{R}^{n+1})(p)$ definiert, wobei $Standard(\mathbb{R}^{n+1})$ die Standard Orientierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Zeigen Sie, dass σ eine Wohldefinierte Orientierung auf S^n ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $(w_1,\dots,w_{n+1})|_x \in Standard(\mathbb{R}^{n+1})(x) \iff \det(w_1,\dots,w_{n+1}) > 0$.

Aufgabe 2 (*Orientierung für S^n Teil 2*)
Sei $\phi^N : U := S^N\backslash\{(0,0,\dots,1)\} \to \mathbb{R}^n$ bez. $\phi^S : V := S^N\backslash\{(0,0,\dots,-1)\} \to \mathbb{R}^n$ Stereographische Projektion von Nordpole bzw. Südpole (wie in der Vorlesung definiert). Von Lemma 7.28, S^n ist orientierbar und es gilt entwieder

$$\det D(\phi^N \circ (\phi^S)^{-1}) > 0,$$

auf $U \cap V$ oder

$$\det D(\phi^N \circ (\phi^S)^{-1}) < 0,$$

auf $U \cap V$. Welche Ungleichung stimmt? (mit Beweis).

Aufgabe 3 (*Integration/Teilung der Eins*)
Sei ω eine n-Form auf eine Mannigfaltikeit M^n der dimension n.

- Zeigen Sie, dass $\int_M \omega$ (wie in der Vorlesung definiert wurde) hängt nicht von der wahl der Zerlegung ab.
- Sei I eine abz̈hlbare Index Menge, und $\{\eta_i | i \in I\}$ eine Teilung der Eins der Mannigfaltigkeit M. Dann gilt

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \eta_i \omega.$$

  Was ist das Problem wenn I nicht abzählbar ist?
- Zeigen Sie: Falls ω kompakten Träger hat, dann ist ω integrierbar.

Aufgabe 4 ()
Sei S^n die Sphäre mit der Orientierung von Aufgabe 1. Sei $\omega \in \Omega^n(S^n)$,

$$\omega(X_1|_p,\dots,X_n|_p) := \det(p, X_1,\dots,X_n).$$

Berechnen Sie $\int_M \omega$.
Hinweis: Stereographische Koordinaten sind nicht immer die beste Koordinaten...

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer bungsgruppe auf jedes Lsungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 07.01.2006 bis 11:15.