

Aufgabe 1 *Zusammenhängend*

Zeigen Sie dass die folgende Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:

$$M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Aufgabe 2 *Polarkoordinaten*

Sei M die Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^3 mit der standard Topologie/differenzierbare Struktur. Sei $V = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und $\psi : V \rightarrow M$,

$$\psi(r, \alpha, \theta) = (r \cos \theta \cos \alpha, r \cos \theta \sin \alpha, r \sin \theta),$$

und $U := \psi(V)$. i

1. Bestimmen Sie U .
2. Zeigen Sie, dass $\psi : V \rightarrow U$, eine Homoömorphimus ist und, dass $\phi := \psi^{-1}$, eine C^∞ Karte auf M ist.
3. Zeigen Sie: Wenn man $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow M$, $\tilde{V} = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \epsilon_0)$, oder $\tilde{V} = (0, \infty) \times (0, 2\pi + \epsilon_0) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ betrachtet ($\epsilon_0 > 0$),

$$\tilde{\psi}(r, \alpha, \theta) = (r \cos \theta \cos \alpha, r \cos \theta \sin \alpha, r \sin \theta),$$

dann ist $\tilde{\psi}$ nicht injektiv.

4. Für die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($M = \mathbb{R}^3$) gelte auf U die Darstellung $f \circ \phi^{-1}(r, \alpha, \theta) = g(r)$, mit einer Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Formulieren Sie Bedingungen (*) an g so dass: $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ genau dann wenn g die Bedingungen (*) erfüllt .

Aufgabe 3 *Riemannsche Zahlenkugel*

Ersetzt man in der Definition eines C^∞ -Atlanten den Bildbereich \mathbb{R}^m durch \mathbb{C}^n und fordert, dass die Kartenwechsel holomorphe Abbildungen sind, so erhält man den Begriff eines *n-dimensionalen komplexen Atlanten* und damit auch einer *n-dimensionalen komplexen Struktur* und einer *n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit*.

Eine Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten heißt dann *holomorph*, falls sie stetig ist und ihre Kartendarstellungen holomorph sind.

Durch die übliche Identifikation von \mathbb{C}^n mit \mathbb{R}^{2n} wird jede n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit zu einer $2n$ -dimensionalen reellen C^∞ -Mannigfaltigkeit und jede holomorphe Abbildung zu einer glatten. Sei ϕ^N und ϕ^S die Stereographische Projektionen von Nord- und Südpol (siehe Vorlesung).

1. Zeigen Sie:

Die Karten ϕ^N und $\overline{\phi^S}$, (der Querstrich bezeichne die komplexe Konjugation) definieren eine 1-dimensionale komplexe Struktur auf S^2 .

2. (Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung: vgl. Aufgabe 3, Serie 2)

$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ werde mit dem Atlas $\{\phi_1, \phi_2\}$ versehen, wobei $\phi_1 := Id_{\mathbb{C}}$ ist und $\phi_2: \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\phi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

Zeigen Sie: Dieser Atlas macht $\widehat{\mathbb{C}}$ zu einer 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit (zur Topologie siehe Aufgabe 3, Serie 2).

Bemerkung: ∞ ist als Punkt der nicht zur \mathbb{C} gehört zu verstehen. Wir hätten genausogut p anstatt ∞ schreiben können, wobei $p \notin \mathbb{C}$.

3. Zeigen Sie: Die Abbildung $f: S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \phi^N(x) & \text{falls } x \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{falls } x = (0, 0, 1), \end{cases}$$

ist biholomorph (d. h. ist bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrabbildung sind holomorph) und als Abbildung zwischen reellen Mannigfaltigkeiten ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 4 C^∞

1. Zeigen Sie: Ist M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $V \subset M$ eine offene Umgebung von p , und ist $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, so existiert eine offene Menge U mit $p \in U \subset V$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die auf U mit g übereinstimmt.

2. Ist \mathfrak{A} ein m -dimensionaler C^∞ -Atlas auf dem topologischen Hausdorff-Raum M , so sei

$$C_{\mathfrak{A}}^\infty(M) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(V, \mathbb{R}) \text{ für alle } \phi: U \rightarrow V, \phi \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei solche Atlanten, so erzeugen sie genau dann dieselbe C^∞ -Struktur, wenn $C_{\mathfrak{A}_1}^\infty(M) = C_{\mathfrak{A}_2}^\infty(M)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 15.11.2003 bis 11:15.