Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie I — WS 05/06, Serie 4
Dr. M. Simon, Hannes Junginger-Gestrich — 16. November 2005

Aufgabe 1 *Möbiusband*

Sei $M := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und Γ,

$$\Gamma := \{h \in \mathrm{Diff}(M) \mid \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ mit } h(x, y) = (x + n, (-1)^n y), \forall (x, y) \in M\}.$$

Zeigen Sie.

1. Γ ist eine Gruppe.
2. Γ operiert frei und eigentlich diskontinuerlich auf M.
3. Sei $N = M/G$. Zeigen Sie: es existiert eine Einbettung (das heisst eine injektive Immersion die einen Homöomorphismus ist) $f : N \to \mathbb{R}^3$.
4. Skizzieren Sie $f(N) \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 *Linsenräume*

Sei $M = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Sei Γ die Menge aller $h\colon M \to M$ der Gestalt

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{2\pi i \frac{n}{q}} z_1, e^{2\pi i \frac{np}{q}} z_2\right), \quad n \in \{0, \dots, q\}.$$

Zeigen Sie: Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf M.
Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q) := M/\Gamma$ heißen *Linsenräume*.

Aufgabe 3 *Die Hochhebung eines Weg*
Seien X, M topologische Räume, und $\pi : M \to X$ eine Überlagerung. Sei $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg. Ein Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to M$ heisst eine *Hochhebung* von γ falls $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$.

1. (Eindeutigkeit) Seien $p_0 \in M$,$x_0 \in X$ mit $\pi(p_0) = x_0$, und $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$. Zeigen Sie: Falls eine Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ, mit $\tilde{\gamma}(0) = p_0$, existiert, dann ist diese Hochhebung eindeutig.
2. (Existenz) Seien $p_0 \in M$,$x_0 \in X$ mit $\pi(p_0) = x_0$, und $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$. Zeigen Sie: Es existiert eine Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ, mit $\tilde{\gamma}(0) = p_0$.

Aufgabe 4 *Überlagerung für den Torus*
Sei

$$T = \{\Big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u\Big) : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\},$$

wobei $a > r > 0$ Konstanten sind.

1. Konstruieren Sie einen topologischer Raum X, und eine Überlagerung $\pi : X \to T$, wobei X *einfach zusammenhängend* ist (siehe Vorlesung).

2. Sei $\gamma : [0,1] \to T$ durch

$$\gamma(t) = \Big((a + r\cos(4\pi t))\cos v, (a + r\cos(4\pi t))\sin v, r\sin(4\pi t)\Big),$$

definiert. Konstruieren Sie eine Hochhebung von γ (siehe Aufgabe 3).

3. Sei $\sigma : [0,1] \to T$ durch

$$\sigma(t) = \Big((a + r\cos(4\pi t))\cos(4\pi t), (a + r\cos(4\pi t))\sin(4\pi t), r\sin(4\pi t)\Big),$$

definiert. Konstruieren Sie eine Hochhebung von σ (siehe Aufgabe 3).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 22.11.2003 bis 11:15.