Aufgabe 1 *(Koordinaten-Vektorfeld auf S^2)*
Auf S^2 sei $\varphi : U^N = S^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Das Vektorfeld X auf S^2 sei gegeben durch

$$X(p) = \begin{cases} \frac{{}^{\varphi}\partial}{\partial x^1}(p) & p \in U^N \\ 0 & p = (0,0,1). \end{cases}$$

Zeigen Sie: X ist C^∞ auf ganz S^2. Geben Sie die Integralkurven von X an, und skizzieren Sie deren Verlauf.

Aufgabe 2 *(C^∞-Vektorfelder)*
Sei $X \in C^0(TM)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $X \in C^\infty(TM)$.
2. Für alle offenen $V \subset M$ und $f \in C^\infty(V)$ gilt $X(f) \in C^\infty(V)$.

Dabei ist natürlich $X(f) : M \to \mathbb{R}$, $X(f)(p) := X(p)(f)$.

Aufgabe 3 *Rang*
Sei $f : M^m \to N^n$ C^∞. Der Rang von f in p ist der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial \psi^j \circ f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}\right)(\phi(p))_{j \in \{1,\dots,n\}, i \in \{1,\dots,m\}},$$

für beliebige Karten $\phi : U \to \phi(U), \psi : V \to \psi(V)$, $p \in U, f(U) \subset V$. Man Zeige:

- Der Rang von f ist wohldefiniert.
- Falls f Rang k in p hat, dann gibt es Koordinaten $\phi : U \to \phi(U), \psi : V \to \psi(V)$, $p \in U, f(U) \in V$ und Funktionen $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^n : \phi(U) \to \psi(V)$, so dass
$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^{k+1}(x), \dots, \alpha^n(x)),$$
fr alle $x \in \phi(U)$.
- Sei $p \in U$, U offen. Falls f Rang k in y fr alle $y \in U$ hat, dann gibt es Koordinaten $\phi : U \to \phi(U), \psi : V \to \psi(V)$, $p \in U, f(U) \in V$, so dass
$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0),$$
für alle $x \in \phi(U)$.

Aufgabe 4 *(Derivationen auf $C^\infty(M)$)*
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1. Sei $v : \tilde{C}_M^\infty(p) \to \mathbb{R}$, eine Derivation in p. Zeigen Sie: $w : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $w(f) := v([f])$ ist eine wohldefinierte Derivation (auf $C^\infty(M)$) in p.

2. Sei $w : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, eine Derivation (auf $C^\infty(M)$) in p. Sei $v([f]) := w(g)$, für $f : U_f \to \mathbb{R}$, $f \in C_M^\infty(p)$, wobei $g : M \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^∞ Funktion mit $g|_{\tilde{U}_f} = f|_{\tilde{U}_f}$ fr eine Offene Menge $\tilde{U}_f \subset U_f$ (siehe Aufgabe 4.1, Serie 3 für die existenz der Funktion g) ist. Zeigen Sie: v ist eine wohldefinierte Derivation auf $\tilde{C}_M^\infty(p)$ in p.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer bungsgruppe auf jedes Lsungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 06.12.2005 bis 11:15.