Aufgabe 1 *Einbettung*

Sei $F : (1,\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$F(t) := \Big(\frac{(t+1)}{2t}\cos(2\pi t), \frac{(t+1)}{2t}\sin(2\pi t)\Big).$$

Skizzieren Sie die Kurve und zeigen Sie, dass F eine Einbettung ist.

Aufgabe 2 *Killing-Vektorfelder*

Auf $M = \mathbb{R}^n$, sei $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ die Standard Karte, $\phi(x) = x$, und sei $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, $i = \{1,\dots,n\}$, die zugehörigen Basis-Vektoren. Sei $A = (a_{ij}) \in so(n)$, und $X(p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot p^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, $Y(p) = \frac{\partial}{\partial x^1}(p)$, und $Z(p) = p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}(p)$ (Bemerkung: $so(n) = \{A = (a_{ij}) \in GL(n,R) : a_{ij} = -a_{ji},\ \forall\ i,j \in \{1,\dots,n\}\}$).

- Zeigen Sie dass $X, Y, Z : M \to TM$ C^∞ sind.
- Bestimmen Sie alle Integralkurven $\phi_p : \mathbb{R} \to M$ für X, bzw. $\psi_p : \mathbb{R} \to M$ für Y, $\alpha_p : \mathbb{R} \to M$ für Z (Bemerkung: obwohl supp$X$ bzw. supp$Y$, supp$Z$ nicht Kompakt sind, existieren (in diesem Fall) $\phi_p, \psi_p, \alpha_p : \mathbb{R} \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $p \in M$).
- Betrachten Sie $\phi_t : M \to M, \phi_t(x) = \phi_x(t)$, und zeigen Sie dass $\phi_t : M \to M$, Isometrieen sind, für alle $t \in \mathbb{R}$. Ein Vektorfeld X mit dieser Eigenschaft heisst *Killing-Vektorfeld*. (Siehe Anwesenheitsaufgaben 7 für Hilfe)
- Ist Y ein Killing-Vekotrfeld? Ist Z ein Killing-Vektorfeld? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 3 *Lokal Fluss*

Sei M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, und $\phi_p : (-\infty, b) \to M$, $b < \infty$ eine *maximale* Integralkurve für X. Mit *maximale* Integralkurve, meinen wir dass $\phi_p : (-\infty, b) \to M$ is eine Glatte Lösung zur

$$\begin{aligned} \tfrac{d\phi_p}{dt}(t_0) &= X(\phi_p(t_0)),\ \forall t_0 \in (-\infty, b), \\ \phi_p(0) &= p, \end{aligned}$$

und alle andere glatte Lösungen $\psi_p : (-\infty, \tilde{b}) \to M$ haben $\tilde{b} \le b$ und $\psi_p = \phi_p|_{(-\infty,\tilde{b})}$. Zeigen Sie: Sei $K \subset M$ Kompakt, dann existiert es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ so dass $\phi_p(t) \notin K$ für alle $t > t_0$.

Aufgabe 4 *Untermannigfaltigkeiten*

Sei $F : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung mit Rank k fr all $p \in M$.

Zeigen Sie: $F^{-1}(q)$ ist eine $(m-k)$-dimensionale Abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M (oder ist leer).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 09.12.2003 bis 11:15.