Aufgabe 1 *Lie-Klammer und Fluss*
Auf $\mathbb{R}^2$ seien die Vektorfelder X, Y gegeben durch $X(x,y) = (y, -\cos x)$ und $Y(x,y) = (y, \cos x)$. Überprüfen Sie, ob die zugehörigen Flüsse ϕ^X und ϕ^Y kommutieren (das heisst, überprüfen Sie ob $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ für alle s, t).

Aufgabe 2 *Integral eines Flusses*
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heisst Integral des Flusses $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ eines Vektorfeldes $X \in C^\infty(TM)$, wenn für jede Flusslinie $c(t) = \phi_p(t)$ gilt: $f \circ c = const.$

(a) Zeigen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

$$f \quad \text{Integral} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = 0.$$

(b) Sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ („Potential“). Die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$x''(t) = -\nabla V(x(t)) \quad (\ \nabla V(x) = (D_1 V(x), \ldots, D_m V(x)\ )$$

lässt sich äquivalent in ein System erster Ordung auf $\mathbb{R}^{2m}$ der Form

$$(x,y)' = X(x,y)$$

umformen, indem man die Funktion $y := x'$ einführt. Bestimmen Sie das Vektorfeld X und zeigen Sie: die „Energie“ $E(x,y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$ ist Integral des Flusses von X.

Aufgabe 3 *Rationale Flusslinien auf dem Torus*
Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei $(\mathbb{Z}^2, +)$ auf $\mathbb{R}^2$ operiert durch $(n,m)\cdot(x,y) = (x+n, y+m)$, mit der zugehörigen Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $X : M \to TM$ das durch $X(\pi(x,y)) = D\pi(x,y)\tilde{X}(x,y)$ gegebene Vektorfeld, wobei $\tilde{X}(x,y) = (1,a)$. Zeigen Sie:

1. Der Fluss von X durch $\pi(p)$ ist $\phi_t(\pi(p)) = \pi(p + t(1,a))$.
2. $a \in \mathbb{Q}$ genau dann, wenn die Flusslinien von ϕ periodisch sind.

Aufgabe 4 *Irrationale Flusslinien auf den Torus*
Sei M, π ,X wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so sind die Flusslinien injektiv und dicht in M.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 20.12.2003 bis 11:15.