Aufgabe 1 (*Definition von alternierend*)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\omega \in T^0_s(V)$. Zeigen Sie, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. $\forall w_1, \ldots, w_s \in V$ gilt $\omega(w_1, \ldots w_s) = 0$ falls zwei der w_i gleich sind.
2. $\forall w_1, \ldots, w_s \in V$ gilt
$$\omega(w_1, w_2, \ldots, w_s) = -\omega(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j, w_{i+1}, \ldots, w_{j-1}, w_i, w_{j+1}, \ldots, w_s).$$
3. $\forall w_1, \ldots, w_s \in V$ gilt $\omega(w_1, \ldots w_s) = 0$ falls $\{w_1, \ldots, w_s\}$ linear abhängig sind.
4. $\forall w_1, \ldots, w_s \in V$, $a^j_i \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\omega(f(w_1), \ldots, f(w_s)) = \det(a^j_i)\omega(w_1, \ldots, w_s)$, wobei $f(w_i) = a^j_i w_j$.

Aufgabe 2(*Basis für $T^r_s(V)$*)
Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis für V und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ Basis für V^*, so ist
$$\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \alpha^{j_s} | 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n\}$$
eine Basis für $T^r_s(V)$.

Aufgabe 3 (*Basis für $\Lambda^s(V^*)$*)
$\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ Basis für V^*, so ist $\{\alpha^{i_1} \wedge \alpha^{i_2} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_n} | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n\}$ eine Basis für $\Lambda^s(V^*)$.

Aufgabe 4(*Eigenschaften von Alt*)

Zeigen Sie:

1. für $S \in T^0_s(V), T \in T^0_l(V)$, mit $Alt(S) = 0$, gilt $Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = 0$.
2. $Alt(Alt(T \otimes S) \otimes R) = Alt(T \otimes S \otimes R) = Alt(T \otimes Alt(S \otimes R))$ für $S \in T^0_s(V), T \in T^0_l(V), R \in T^0_r(V)$
3. für $\omega \in \Lambda^s(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*), \theta \in \Lambda^k(V^*)$, gilt
$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(s+l+k)!}{s!l!k!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta),$$
und
$$\omega \wedge \eta = (-1)^{sl} \eta \wedge \omega.$$

Aufgabe 5 (*Alt(Alt) = Alt*)
Man zeige:

1. für $T \in T_s^0(V)$ gilt $Alt(T) \in \Lambda^s(V^*)$.
2. für $\omega \in \Lambda^s(V^*)$, gilt $Alt(\omega) = \omega$,

Aufgabe 6 (*Dachprodukt von* 1*-Formen*)
Zeigen Sie: für $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \Lambda^1(V^*) = V^*$ folgende Aussagen:

(1) $(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$.

(2) $\omega^1, \ldots, \omega^k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0$.

Aufgabe 7 (*Zerlegbare* k*-Formen*)
Eine Form $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ heißt zerlegbar (oder einfach), falls sie als Dachprodukt von 1-Formen darstellbar ist. Beweisen Sie:

(1) Jede k-Form ist zerlegbar, falls $\dim V^* \leq 3$.

(2) $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{4^*})$ ist nicht zerlegbar. Dabei sei $e^1, \ldots, e^4$ die duale Basis zur Standardbasis, also $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Aufgabe 8 (*Lipschitz-Abhängigkeit des Flusses vom Anfangswert*)
Betrachte auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lösungen $\gamma_i : [0, T] \to \Omega$ der beiden Anfangswertprobleme

$$\gamma_i'(t) = X_i(\gamma_i(t)), \quad \gamma_i(0) = p_i \in \Omega \quad (i = 1, 2),$$

Die $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ seien Lipschitzstetig mit Konstante $L < \infty$. Beweisen Sie:

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq e^{LT}\left(|p_1 - p_2| + T\,\|X_1 - X_2\|_{C^0(\Omega)}\right).$$

Hinweis. Verwenden Sie die Gronwallsche Ungleichung.

Diese Aufgaben sind Freiwillig: Erfolgreich gelöste Aufgaben führen zu Bonuspunkten. Frohe Weinachten und einen guten rutsch. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 10.1.2006 bis 11:15.