

Aufgabe 1 *Produkt Topologie*

Sei \mathcal{O}_M eine Topologie auf M , und \mathcal{O}_N eine Topologie auf N .

1. Sei

$$\mathcal{O}_{M \times N} = \{\cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \times C_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{O}_M, C_\lambda \in \mathcal{O}_N\},$$

die sog. Produkttopologie auf $M \times N$. Weisen Sie nach dass $\mathcal{O}_{M \times N}$ tatsatlich eine Topologie ist.

2. Falls \mathcal{O}_M und \mathcal{O}_N Hausdorff sind, dann ist $\mathcal{O}_{M \times N}$ Hausdorff.

3. Falls \mathcal{B}_M eine Basis von \mathcal{O}_M ist, und \mathcal{B}_N eine Basis von \mathcal{O}_N ist, dann ist $\mathcal{B}_{M \times N} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}_M, C \in \mathcal{B}_N\}$ eine Basis von $\mathcal{O}_{M \times N}$.

Aufgabe 2 *Stetigkeit in metrischen Räumen*

Seien X, Y metrische Räume mit der (jeweils) von der Metrik induzierten Topologie, und sei $f : X \rightarrow Y$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für all offenen $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

2. Für alle konvergenten Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i)$.