Aufgabe 1 *Produkt Topologie*
Sei $\mathcal{O}_M$ eine Topologie auf M, und $\mathcal{O}_N$ eine Topologie auf N.

1. Sei
$$\mathcal{O}_{M\times N} = \{\cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \times C_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{O}_M, C_\lambda \in \mathcal{O}_N\},$$
die sog. Produkttopologie auf $M \times N$. Weisen Sie nach dass $\mathcal{O}_{M\times N}$ tatsätlich eine Topologie ist.

2. Falls $\mathcal{O}_M$ und $\mathcal{O}_N$ Hausdorff sind, dann ist $\mathcal{O}_{M\times N}$ Hausdorff.

3. Falls $\mathcal{B}_M$ eine Basis von $\mathcal{O}_M$ ist, und $\mathcal{B}_N$ eine Basis von $\mathcal{O}_N$ ist, dann ist $\mathcal{B}_{M\times N} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}_M, C \in \mathcal{B}_N\}$ eine Basis von $\mathcal{O}_{M\times N}$.

Aufgabe 2 *Stetigkeit in metrischen Räumen*

Seien X, Y metrische Räume mit der (jeweils) von der Metrik induzierten Topologie, und sei $f : X \to Y$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für all offenen $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

2. Für alle konvergenten Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X gilt $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i)$.