Aufgabe 1 (*Maxwell-Gleichungen*)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ die 1-Form $A = A_0\,dt + \sum_{i=1}^3 A_i\,dx^i$. Seien $E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

$$dA = -\sum_{i=1}^{3} E^i\,dt \wedge dx^i + \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} B^i\,\theta^i$$

definiert, wobei $\theta^1 = dx^2 \wedge dx^3$, $\theta^2 = dx^1 \wedge dx^3$, $\theta^3 = dx^1 \wedge dx^2$. Folgern Sie aus $d^2 A = 0$ die folgenden beiden Maxwellgleichungen (insgesamt gibt es 4 Maxwellgleichungen):

$$\operatorname{div}(B(t_0,\cdot))(x_0) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t}(t_0, x_0) + \operatorname{rot}(E(t_0,\cdot))(x_0) = 0.$$

Die Rotation und Divergenz sind für $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\operatorname{rot}(Y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot}(Y)(x) := \left(\frac{\partial Y^3}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial Y^2}{\partial x^3}(x), -\frac{\partial Y^3}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial Y^1}{\partial x^3}(x), \frac{\partial Y^2}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial Y^1}{\partial x^2}(x) \right),$$

und $\operatorname{div}(Y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{div}(Y)(x) := \frac{\partial Y^1}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial Y^2}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial Y^3}{\partial x^3}(x).$$

Aufgabe 2 (*Lemma von Cartan*)
Seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(M)$ 1-Formen, die in jedem Punkt $p \in M$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie: sind $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Omega^1(M)$ 1-Formen mit

$$\sum_{i=1}^{k} \phi_i \wedge \omega_i = 0,$$

so gibt es Funktionen $a_{ij} \in C^\infty(M)$, $1 \le i, j \le k$, mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $\phi_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}\omega_i$.