Aufgabe 1 *Stetigkeit und die Quotienttopologie*

Seien X, Y topologische Räume, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X . Sei $[z] := \{w \in X : w \sim z\}$ die Äquivalenzklasse von z sowie $X/\sim := \{[z] : z \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \rightarrow X/\sim, z \rightarrow [z]$ die kanonische Projektion. Wir versehen $X/\sim$ mit der Quotienttopologie. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $f(x) = f(y)$ für alle x, y mit $x \sim y$ (also, f ist konstant auf jeder Fasser). Zeigen Sie:

1. $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ ist durch $\tilde{f}([x]) = f(x)$ wohldefiniert.
2. f ist stetig $\iff \tilde{f}$ ist stetig .

Aufgabe 2 *Differenzierbare Struktur für S^1*

Definiere für $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$:

$$\begin{aligned}\phi_1 : S^1 \setminus \{(1, 0)\} &\rightarrow (0, 2\pi), \quad \phi_1(x, y) = 2 \operatorname{arccot} \frac{y}{1-x} \\ \phi_2 : S^1 \setminus \{(0, -1)\} &\rightarrow (-\pi, \pi), \quad \phi_2(x, y) = 2 \arctan \frac{y}{1+x}.\end{aligned}$$

Man Zeige, dass S^1 mit $A = \{\phi_1, \phi_2\}$ eine Mannigfaltigkeit ist, und dass A C^∞ ist. Sei $\tilde{A}$ der Atlas mit den Stereographischen Projektion (wurde in der Vorlesung definiert). Bezeichne A' den maximalen Atlas mit $A \subset A'$ und $\tilde{A}'$ den maximalen Atlas mit $\tilde{A} \subset \tilde{A}'$. Man Zeige: $A' = \tilde{A}'$.