Aufgabe 1 *Operation von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$*
Zeigen Sie, dass die Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf dem $\mathbb{R}^n$ operiert, wobei

$$\Gamma \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ , (a, x) \mapsto x + a.$$

Aufgabe 2 *Überlagerung für den Torus*
Sei

$$T = \left\{ \Big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u \Big) : (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \right\},$$

wobei $a > r > 0$ Konstanten sind.

1. Konstruieren Sie eine Überlagerung $\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ (siehe Vorlesung).
2. Sei $\gamma : [0, 1] \to T$ durch

   $$\gamma(t) = \Big((a + r\cos(4\pi t))\cos v, (a + r\cos(4\pi t))\sin v, r\sin(4\pi t) \Big),$$

   definiert. Konstruieren Sie einen Lift von γ (siehe unten).
3. Sei $\sigma : [0, 1] \to T$ durch

   $$\sigma(t) = \Big((a + r\cos(4\pi t))\cos(4\pi t), (a + r\cos(4\pi t))\sin(4\pi t), r\sin(4\pi t) \Big),$$

   definiert. Konstruieren Sie einen Lift von σ (siehe unten).

Seien X, M topologische Räume, und $\pi : M \to X$ eine Überlagerung. Sei $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg, dann heißt ein Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to M$ *Lift* von γ falls $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$.