Klausur zur Differentialgeometrie I **WS 07/08**

Dr. M. Simon 11. Februar 2008

Beginn der Klausur: 11:15 Uhr **Ende der Klausur: 13:00 Uhr**

Klausurnummer: ....

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtstag und -ort: ....

Studienfach: .... Semesterzahl: ....

Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis unter der oben genannten Klausurnummer auf die DGI Internetseite gestellt wird

(Unterschrift): ....

Wenn Sie nicht einverstanden sind, dann unterschreiben Sie nicht.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Kennzeichen Sie alle Zettel mit Namen, Matrikelnummer und Nummer der Aufgabe.
- Geben Sie alle Zettel, auch die mit Nebenrechnungen, gemeinsam mit dem vollständig ausgefüllten Deckblatt ab.
- Als Hilfsmittel sind nur Stifte o.ä. zugelassen.
- Ein Täuschungsversuch kann zum sofortigen Ausschluss und Nichtbestehen der Klausur führen; in jedem Fall werden Sie verwarnt. Ein zweiter Täuschungsversuch nach Verwarnung führt notwendig zum Nichtbestehen der Klausur.
- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit Ihre Schritte.
- Es sind insgesamt 6 Aufgaben.
- Insgesamt sind 20 Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $q : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ folgende quadratische Form

$$q(x) = q\big((x_1, \ldots, x_{n+m})\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^2.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Teilmenge

$$M_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} | \ q(x) = c\} = q^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

(mit der von $\mathbb{R}^{n+m}$ induzierten Topologie).

1. Zeigen Sie, dass M_c für $c \neq 0$ eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie die Dimension von M_c in diesem Fall. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass $M_0 = q^{-1}(0)$ keine Mannigfaltigkeit ist. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Die Heisenberg Gruppe

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z + ay + c \end{pmatrix}.$$

(dass die Gruppe frei und eingentlich operiert, dürfen Sie voraussetzen: dies wurde in Übungsaufgabe 2, Serie 5 bewiesen).
Zeigen Sie, dass die Heisenberg Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3/\Gamma$ orientierbar ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigeit. Zeigen Sie, dass die äußere Ableitung einer C^∞ 1–Form θ durch

$$\mathrm{d}\theta(p)(v, w) := X(p)(\theta(Y)) - Y(p)(\theta(X)) - \theta([X, Y])(p),$$

gegeben ist, wobei X, Y beliebige C^∞ Vektorfelder sind mit $X(p) = v$, und $Y(p) = w$, und $\theta(Y) : M \to \mathbb{R}$ die C^∞ Funktion $\theta(Y)(q) := \theta(q)(Y(q))$ ist. (Die Existenz glatter

Vektorfelder X, Y mit $X(p) = v$ und $Y(p) = w$ ist gegeben nach Übungsaufgabe 2, Serie 7 und Vorlesung.)

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ die drei-dimensionale Sphäre. Für $p = (p^1, p^2, p^3, p^4) \in S^3$, sei $c_p : \mathbb{R} \to S^3$ die Kurve $c_p(t) = (\cos t) \cdot p + (\sin t) \cdot (-p^2, p^1, -p^4, p^3)$, und sei $X(p) := \frac{dc_p}{dt}(0)$. Man Zeige: $X : S^3 \to TS^3$ ist ein C^∞ Vektorfeld, das nirgends verschwindet.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind die Vektorfelder $X(x) := -2x$ und $Y(x) = -\frac{x}{|x|^2}$ gegeben. Bestimmen Sie den Fluss von X und Y sowie die Definitionsmengen M^X, M^Y der Flüsse. Welche der Vektorfelder sind vollständig integrierbar?

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M^{2n} der Dimension $2n$ heißt *symplektisch*, wenn eine glatte 2-Form ω auf M deart existiert, dass $\mathrm{d}\omega = 0$ und $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n-mal}$ nirgends verschwindet.

1. Zeigen Sie, dass für eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit M^{2n} (ohne Rand), die Kohomologie $H^{2k}(M)$ nicht trivial ist für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. (2 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass $S^2 \times S^2$ symplektisch ist. (2 Punkte)
   Hinweis: Teil 2 dieser Aufgabe ist etwas schwieriger.

ENDE DER KLAUSUR:
Viel Erfolg!