Probeklausur zur Differentialgeometrie I — WS 07/08

Dr. M. Simon — 4. Februar 2008

Aufgabe 1(*Mannig.)*
Sei $X \subset \mathbb{R}^2, X = \{(x, \frac{1}{i}) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}, i \neq 0\}$, mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie versehen. Beantworten Sie (mit Beweis) folgende Fragen:

1. Ist M Hausdorff?(1Punkt)

2. Ist M eine Mannigfaltigkeit?(2 Punkte)

3. Ist M zusammenhängend?(1 Punkt)

Aufgabe 2*Mannig.*
Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || x| = |y|\}$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie versehen. Zeigen Sie, dass M keine Mannigfaltigkeit ist. (4 Punkte)
Aufgabe 3 *Möbiusband*
Sei $M := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und

$$\Gamma := \left\{ h \in \mathrm{Diff}(M) \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ mit } h(x, y) = (x + n, (-1)^n y), \forall (x, y) \in M \right\}.$$

Zeigen Sie.

1. Γ ist eine Gruppe.(1 Punkt)

2. Γ operiert frei und eigentlich diskontinuerlich auf M.(2 Punkte)

3. Sei $N = M/G$. Beweise Sie, dass N nicht orientierbar ist.(2 Punkte)

Aufgabe 4 *ein glattes Vektorfeld auf S^2*
Auf S^2 sei $\phi : U^N = S^2 \backslash \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Das Vektorfeld X auf S^2 sei gegeben durch

$$X(p) = \begin{cases} \frac{{}^{\varphi}\partial}{\partial x^1}(p) & p \in U^N \\ 0 & p = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Zeigen Sie: X ist C^∞ auf ganz S^2. (4 Punkte)
Aufgabe 5
Prüfen Sie nach ob folgende Abbildungen Immersionen und/oder Einbettungen sind (mit Beweis).

1. $F : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ $F(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(2(t - \frac{\pi}{2})))$(2 Punkte)

2. $F : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ $F(\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$.(2 Punkte)

Aufgabe 6
Sei M^n kompakt ohne Rand und orientierbar. Zeigen Sie, dass $H^n(M)$ nicht trivial ist (3 Punkte) (Hinweis: Satz von Stokes.).
Aufgabe 7
Sei V ein $n-dim$ Vektorraum, und $\omega^i \in \Lambda^*(V), v_i \in V$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$. Beweisen Sie, dass

$$(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$$

(3 Punkte)
Aufgabe 8(*Zussamenzierbar und Kohomologie*)
Sei M Zusammenziebar: es existiert ein $F \in C^\infty((a,b) \times M, M)$ mit $[0,1] \subset (a,b)$, so dass $F(0,\cdot) = x_0$ und $F(1,\cdot) = Id(\cdot)$ wobei $x_0 \in M$. Man Zeige:

- $H^k(M) = \{0\}$ für alle $k > 0$. (2 Punkte)
- $H^0(M) = \mathbb{R}$. (1 Punkt)

Aufgabe 9 ($\mathbb{R}P^2$ *nicht diffeomorph zu* S^2)
Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht diffeomorph zu S^2 ist. (Hinweis: benutzen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ nicht orientierbar ist). (3 Punkte)
Aufgabe 10
Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $X(x) = |x|^2 x$. Was ist der Fluss für X? (mit Beweis). Ist X vollständig intergrierbar?(4 Punkte)

Die Klausur selber, wird etwas kürzer sein