Aufgabe 1 *(Lie Klammer)*
Für $k \geq 2$ seien X, Y, Z C^k-Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

Aufgabe 2 (*Lipschitz-Abhängigkeit des Flusses vom Anfangswert*)
Betrachte auf der offenen, beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lösungen $\gamma_i : [0,T] \to \Omega$ der beiden Anfangswertprobleme

$$\gamma_i'(t) = X_i(\gamma_i(t)), \quad \gamma_i(0) = p_i \in \Omega \quad (i = 1, 2).$$

Die $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ seien Lipschitzstetig mit Konstante $1 \leq L < \infty$. Sei $f_\epsilon : [0,T] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\epsilon(t) := e^{-Lt}\sqrt{|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2 + \epsilon} - \sqrt{|p_1 - p_2|^2 + \epsilon} - t \sup_{x\in\Omega} |X_1(x) - X_2(x)| - \epsilon.$$

Zeigen Sie: für alle $t \in [0,T]$ gilt:

1. $\frac{df_\epsilon(t)}{dt} \leq 0.$
2. $f_0(t) \leq 0.$
3. $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq e^{Lt}(|p_1 - p_2| + t \sup_{x\in\Omega} |X_1(x) - X_2(x)|).$

Aufgabe 3 *(Irrationale Flusslinien auf dem Torus)*
Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei $(\mathbb{Z}^2, +)$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $(n,m) \cdot (x,y) = (x + n, y + m)$ operiert. Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$ die Projektion, $\pi(x) = [x]$. Für $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sei $X : M \to TM$ das durch $X(\pi(x,y)) = D\pi(x,y)\tilde{X}(x,y)$ gegebene Vektorfeld, wobei $\tilde{X}(x,y) = (1,a)|_{(x,y)}$. Zeigen Sie: Die Flusslinien sind injektiv und dicht in M, dass heisst, die maximale Integralkurve $c_p : I_p \to M$ für X mit Anfangswert p ist injektiv, und $c_p(I_p)$ ist eine dichte Teilmenge von M.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.