

Aufgabe 1 *Vektorwertige Tensoren.*

1. Sei $S : M \rightarrow T_s^r(M)$ ein C^∞ $\binom{r}{s}$ Tensor auf M . Die Abbildung $T_S : C^\infty(\mathcal{X}(M)) \times C^\infty(\mathcal{X}(M)) \times \dots \times C^\infty(\mathcal{X}(M)) \rightarrow C^\infty(T_s^0(M))$ sei definiert durch

$$T_S(X_1, \dots, X_r)(p)(\alpha_1(p), \dots, \alpha_s(p)) = S(p)(X_1(p), \dots, X_r(p), \alpha_1(p), \dots, \alpha_s(p))$$

wobei $C^\infty(\mathcal{X}(M))$ die Menge der C^∞ Vektorfelder auf M und $C^\infty(T_r^0(M))$ die Menge der C^∞ $\binom{0}{r}$ Tensoren auf M ist. Man Zeige: T_S ist C^∞ linear, d.h.

$$T_S(X_1, \dots, X_{p-1}, X_p + fW, X_{p+1}, \dots, X_r) = T_S(X_1, \dots, X_{p-1}, X_p, X_{p+1}, \dots, X_r) + fT_S(X_1, \dots, X_{p-1}, W, X_{p+1}, \dots, X_r).$$

wobei die X_i und W C^∞ Vektorfelder sind und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

2. Sei jetzt $T : C^\infty(\mathcal{X}) \times C^\infty(\mathcal{X}) \times \dots \times C^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(T_r^0(M))$ C^∞ -linear (siehe oben). Zeigen Sie, dass dann genau ein C^∞ $\binom{r}{s}$ Tensor S mit $T_S = T$ existiert (T_S definiert wie oben).

(Bemerkung: In der Physik/Differentialgeometrie kommen solche Objekte wie in 2. häufiger vor. Mit dieser Aufgabe sieht man, dass solche Abbildungen auch als Tensoren im Sinne der Vorlesung verstanden werden können).

Aufgabe 2 (*Eigenschaften des Dachprodukts*)

Beweisen Sie:

- $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \psi = \lambda(\omega \wedge \psi) + \mu(\eta \wedge \psi)$ für $\omega, \eta \in \Lambda^k(V)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ für $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\eta \in \Lambda^l(V)$.

Aufgabe 3 *Zerlegbar oder nicht*

Eine Form $\omega \in \Lambda^k(V)$, $k \geq 1$, heißt zerlegbar (oder einfach), falls sie als Dachprodukt von 1-Formen darstellbar ist. Beweisen Sie:

- (1) Jede k -Form ist zerlegbar, falls $\dim V \leq 3$.
- (2) $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ ist nicht zerlegbar. Dabei sei $e^1, \dots, e^4$ die duale Basis zur Standardbasis, also $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.