

Aufgabe 1 (*Eigenschaften des Pullbacks*)

Beweisen Sie Lemma 7.10 der Vorlesung: Für $f \in C^1(M, N)$ gilt

- $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = (\lambda \circ f)f^*\omega + (\mu \circ f)f^*\eta$ für alle $\omega, \eta \in \Omega^k(N)$ und $\lambda, \mu : N \rightarrow \mathbb{R}$.
- $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$ für alle $\omega \in \Omega^k(N)$ und $\eta \in \Omega^l(N)$.
- $(g \circ f)^*(\omega) = f^*(g^*(\omega))$ für alle $g \in C^1(N, P)$ und $\omega \in \Omega^k(P)$.

Aufgabe 2 (*Definition der äußeren Ableitung*)

Für $\omega \in \Omega^l(M)$ und Vektorfelder $X_0, X_1, \dots, X_l \in C^\infty(TM)$ sei

$$\begin{aligned} T(X_0, \dots, X_l) &= \sum_{j=0}^l (-1)^j X_j(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_l)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq j < k \leq l} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_l), \end{aligned}$$

wobei $\widehat{}$ das Weglassen des entsprechenden Eintrages bedeutet.

- Zeigen Sie, dass T in $X_0, \dots, X_l$ linear über $C^\infty(M)$ und alternierend ist.
- Folgern Sie durch Nachrechnen bzgl. der Basisfelder einer Karte, dass $T(X_0, \dots, X_l) = d\omega(X_0, \dots, X_l)$.

Aufgabe 3 (*Riemannsche Flächen*)

Sei Σ eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, das heißt Σ besitzt einen zweidimensionalen, reellen Atlas mit Karten

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad \varphi(p) = x + iy = z,$$

so dass alle Kartenwechsel holomorph sind. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Die Abbildung $J : TU \rightarrow TU$, $J(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) = -b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}$ hängt nicht von der Wahl der Karte ab, das heißt J ist ein glatter $(1, 1)$ -Tensor auf Σ mit $J^2 = -\text{Id}$.
- Sei $\Omega_{\mathbb{C}}^1(\Sigma)$ der Raum der $\mathbb{C}$ -wertigen 1-Formen. Dann gilt die Zerlegung $\Omega_{\mathbb{C}}^1(\Sigma) = \Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma) \oplus \Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(\Sigma)$, wobei $\Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma)$ (bzw. $\Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(\Sigma)$) der Raum der 1-Formen ω mit $\omega(JX) = i\omega(X)$ (bzw. $\omega(JX) = -i\omega(X)$) ist.
- Eine Form $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma)$ hat bzgl. einer Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $\omega = f dz$, wobei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $dz = dx + idy$, und es gilt:

$$\omega \text{ geschlossen auf } U \Leftrightarrow f \text{ holomorph.}$$

Bemerkung. Eine $\mathbb{C}$ -wertige 1-Form ist vom Typ $\omega = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma)$. Ihre äußere Ableitung ist gegeben durch $d\omega = d\alpha + id\beta$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.