
Aufgabe 1 (*$H^0(M)$*)
Für $k = 0$ definieren wir $B^0(M) = \{0\}$ (0-dim. Vekotrraum). Dadurch ist $H^0(M)$ wohldefiniert (Erinnerung: $\Omega^0(M) = \{f | f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$ und dadurch ist $Z^0(M)$ wohldefiniert). Zeigen Sie: $H^0(M)$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^d$, falls M genau d Zusammenhangskomponenten besitzt, i.e. $M = M_1 \cup \ldots \cup M_d$, mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und M_i zusammenhängend für alle $i \in \{1, \ldots d\}$.

Aufgabe 2 (*Zusammenzierbar und Kohomologie*)
Sei M zusammenziebar: es existiert ein $F \in C^\infty((a, b) \times M, M)$ mit $0, 1 \in (a, b)$, so dass $F(0, \cdot) = x_0$ und $F(1, \cdot) = Id(\cdot)$, wobei $x_0 \in M$. Man zeige:

- $H^k(M) = \{0\}$ für alle $k > 0$.
- $H^0(M) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 ($\mathbb{R}P^n$ *orientierbar ?*)
Man schreibe $\mathbb{R}P^n = S^n/\Gamma$ mit $\Gamma = \{-Id, Id\}$. Sei $f : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch $f(x) = -x$ gegeben und sei S^n mit der Orientierung aus der Vorlesung versehen. Zeigen Sie: f ist genau dann orientierungstreu, wenn n ungerade ist. $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.
Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.