Aufgabe 1 *Diffeomorph impliziert Homeomorph*
Sei $f : M^n \to N^n$ ein C^∞ Diffeomorphismus zwischen $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{V}, \mathcal{B})$ wobei $\mathcal{O}$ die Topologie auf M, $\mathcal{V}$ die Topologie auf N bezeichnet, sowie $\mathcal{A}$ ein maximaler C^∞ Atlas auf M und $\mathcal{B}$ ein maximaler C^∞ Atlas auf N ist. Zeigen Sie: $f : M \to N$ ist eine Homeomorphismus zwischen den topologischen Räumen $(M, \mathcal{O})$ und $(N, \mathcal{V})$. (Bemerkung: Homeomorphismus und Diffeomorphismus sind in der Vorlesung definiert worden).

Aufgabe 2 *Möbiusband*
Sei $M := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und

$$\Gamma := \left\{ h \in \mathrm{Diff}(M) \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ mit } h(x, y) = (x + n, (-1)^n y), \forall (x, y) \in M \right\}.$$

Zeigen Sie.

1. Γ ist eine Gruppe.
2. Γ operiert frei und eigentlich diskontinuerlich auf M.

Aufgabe 3 *Linsenräume*
Sei $M = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Sei Γ die Menge aller $h \colon M \to M$ der Gestalt

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{2\pi i \frac{n}{q}} z_1, e^{2\pi i \frac{np}{q}} z_2 \right), \quad n \in \{0, \ldots, q\}.$$

Zeigen Sie: Γ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf M. Die Mannigfaltigkeiten $L(p, q) := M/\Gamma$ heißen *Linsenräume.*
Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 19.11.07 bis 11:15.