

Aufgabe 1 $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Man zeige, dass $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ein lokaler Diffeomorphismus ist (π , S^n und $\mathbb{R}P^n$ sind wie in der Vorlesung definiert).

Aufgabe 2 3-dimensionale Heisenberg-Mannigfaltigkeit

Sei $X := \mathbb{R}^3$ und Γ ,

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Γ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.
2. Zeigen Sie, dass durch $\Gamma \times X \rightarrow X$ mit

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z + ay + c \end{pmatrix}$$

eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung erklärt ist, die frei operiert.
Der Quotient X/Γ heißt 3-dim Heisenberg-Mannigfaltigkeit

Aufgabe 3 Lokal Diffeomorph

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ Abbildung und $x_0 \in \Omega$. Wir nehmen an, dass $Df(x_0)(v) \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

1. es existiert ein $r > 0$ klein genug, so dass $f|_{B_r(x_0)} : B_r(x_0) \rightarrow f(B_r(x_0))$ ein Homeomorphismus ist (wobei $f(B_r(x_0))$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie versehen ist).
2. $f(B_r(x_0))$ ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, und $f(B_r(x_0))$ ist Diffeomorph zu $B_r(x_0)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.