
Aufgabe 1 *ein glattes Vektorfeld auf S^2*
Auf S^2 sei $\phi : U^N = S^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Das Vektorfeld X auf S^2 sei gegeben durch

$$X(p) = \begin{cases} \frac{{}^{\varphi}\partial}{\partial x^1}(p) & p \in U^N \\ 0 & p = (0,0,1). \end{cases}$$

Zeigen Sie: X ist C^∞ auf ganz S^2.

Aufgabe 2 *Abschneide Funktion*
Sei M eine differenizerbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und U offen mit $p \in U$. Zeigen Sie: es existiert eine (Abschneide) Funktion $\eta : M \to \mathbb{R}$, so dass

- $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \in C^\infty(M)$,
- $\overline{\mathrm{supp}(\eta)} \subset U$,
- es existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p mit $\eta(x) = 1$ für alle $x \in V$

(hier bezeichnet $\mathrm{supp}(f) = \{x \in M | f(x) \neq 0\}$ den Träger (support) von f und $\bar{H}$ den Abschluss von H).

Aufgabe 3 *T_pM*
Sei $T_pM = \{v |\ v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ist linear und erfüllt die Leibniz Regel $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$. Sei ${}_2T_pM$ wie in der Vorlesung definiert (definition 3.13). Man Zeige: T_pM und ${}_2T_pM$ sind als Vektorräume isomorph zueinander. (Hinweis: benutzen Sie Aufgabe 2).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.