Aufgabe 1 *f-verwandt*

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$ und X das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ mit $X(x,y) = y|_{(x,y)} = y \cdot e_1(x)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld X und zeigen Sie: Es existiert kein Vektorfeld Y, so dass Y f-verwandt ist zu X.

(b) Sei $f : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = t$ mit $x \in \mathbb{S}^n, t \in \mathbb{R}$. Definiere das Vektorfeld X auf $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ durch $X(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(x,t)$ wobei $\frac{\partial}{\partial t}(x,t)(l) = \frac{\partial l}{\partial t}(x,t)$, für $l \in C^\infty(S^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sei Y das Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $Y(s) = \frac{\partial}{\partial s}(s)$ wobei $\frac{\partial}{\partial s}(s)(l) = \frac{\partial l}{\partial s}(s)$. Man Zeige: Y ist f-verwandt zu X.

Aufgabe 2 *Integral eines Flusses*
Sei X ein glattes, vollständiges Vektorfeld auf M und $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ der Fluß von X, dann heißt eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ Integral von ϕ, wenn für jede Flusslinie $c(t) = \phi_p(t)$ gilt: $f \circ c = const.$

(a) Zeigen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

$$f \quad \text{Integral} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = 0.$$

(b) Sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ („Potential"). Die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$x''(t) = -\nabla V(x(t)) \quad (\ \nabla V(x) = (D_1 V(x), \ldots, D_m V(x)\ )$$

lässt sich äquivalent in ein System erster Ordung auf $\mathbb{R}^{2m}$ der Form

$$(x,y)' = X(x,y)$$

umformen, indem man die Funktion $y := x'$ einführt. Bestimmen Sie das Vektorfeld X und zeigen Sie: die „Energie" $E(x,y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$ ist Integral des Flusses von X.

Aufgabe 3 *Rationale Flusslinien auf dem Torus*
Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei $(\mathbb{Z}^2, +)$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $(n,m)\cdot(x,y) = (x+n, y+m)$ operiert. Die zugehörige Projektion wird mit $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$ bezeichnet. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $X : M \to TM$ das durch $X(\pi(x,y)) = D\pi(x,y)\tilde{X}(x,y)$ gegebene Vektorfeld, wobei $\tilde{X}(x,y) = (1,a)$. Zeigen Sie:

1. Der Fluss von X durch $\pi(p)$ ist $\phi_t\big(\pi(p)\big) = \pi\big(p + t(1,a)\big)$.

2. $a \in \mathbb{Q}$ gilt genau dann, wenn die Flusslinien von ϕ periodisch sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.