

Differentialgeometrie I

Wintersemester 2007/08

Dr. M. Simon

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Vorlagen: DG Skript von Prof.Dr.E.Kuwert, WS 03/04, und
Skript M.Simon WS 05/06

Inhaltsverzeichnis

1	Topologie und der Begriff der Mannigfaltigkeit	2
2	Differenzierbare Abbildungen und Überlagerungen	15
3	Tangential Vektoren und Differential	24
4	Untermannigfaltigkeiten, Immersionen und Einbettungen	33
5	Integral Kurven und Flüsse	40
6	Tensoren und Tensorfelder	51
7	Formen	55

Einleitung

Klassische Differentialgeometrie

Gegenstand der klassischen Differentialgeometrie sind Flächen (oder Kurven) $M \subseteq \mathbb{R}^3$.

Beispiel 0.1 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Beispiel 0.2 $B_r^2(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r, z = 0\}$

Beispiel 0.3 $L_{v_1, v_2}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) = t(v_1, v_2), t \in \mathbb{R}\}$ (für $(v_1, v_2) = (0, 0)$ ist L^1 ein Punkt, sonst ist L^1 eine Linie).

Beispiel 0.4 $E_{(\eta_1, \eta_2, \eta_3)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \cdot (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0\}$ ($|(\eta_1, \eta_2, \eta_3)| \neq 0$ impliziert, dass E eine Ebene ist, sonst ist $E = \mathbb{R}^3$).

Beispiel 0.5 $K^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$

Beispiel 0.6 $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $T = \{(R+r \cos \theta) \cos \alpha, (R+r \cos \theta) \sin \alpha, r \sin \theta | \alpha, \theta \in \mathbb{R}\}$ wobei wir $R-r > 0$ voraussetzen (obwohl wir später in dem Semester das nicht unbedingt voraussetzen möchten)

Diese können alle *lokal* durch „Parametrisierungen“ beschrieben werden.

Beispiel 1.7: Im Fall Beispiel 1.1, beschreiben wir ein Stück von S^2 durch $f(x, y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $f : B_1^2 \rightarrow S^2$. f ist dann eine Paramtrisierung von S^2 um dem Punkt $(0, 0, 1)$. Jeder Punkt in S^2 hat eine Umgebung, so dass es (z.b. nach einer Dreheung) lokal so aussieht.

Eine Fläche $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sieht lokal wie der 2-dimensionale reelle Raum (oder ein Stück davon) aus.

Moderne Differentialgeometrie

In der modernen Differentialgeometrie werden Flächen *intrinsisch* beschrieben, das heißt ohne Hilfe einer Einbettung in $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^n$). Um dieses zu ermöglichen, wurde der Begriff der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit eingeführt: eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M wird mit Hilfe von mehreren lokalen Parametrisierungen $f : D \rightarrow M$ definiert, wobei M jetzt eine Menge ist, die nicht unbedingt in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

Da viele Objekte in der Mathematik und in den Naturwissenschaften vorkommen, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, wurde auch der Begriff der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit eingeführt.

Das „Differential-“in „Differentialgeometrie I“kommt davon, dass man Analysis auf Mannigfaltigkeiten durchführen will (z. B. Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzieren).

Heutzutage, wenn man von „Geometrie einer Mannigfaltigkeit“ M redet, redet man von einer Riemannschen Metrik auf M , und dem zugehörigen Riemannschen Krümmungstensor. Durch einer Riemannschen Metrik werden Längen von und Winkeln zwischen Kurven festgelegt. Die Einführung einer Riemannschen Metrik auf eine Mannigfaltigkeit ist oft ein sehr hilfreiches und natürliches Hilfsmittel, um Analysis auf Mannigfaltigkeiten durchzuführen. Es ist aber nicht notwendig, eine Riemannsche Metrik einzuführen um Mannigfaltigkeiten zu untersuchen/definieren.

1 Topologie und der Begriff der Mannigfaltigkeit

Definition 1.1 Sei X eine Menge.

$$2^X := \{S \subseteq X\}.$$

Eine Topologie auf einer Menge X ist $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
- (ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$, falls $U_\lambda \in \mathcal{O}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ (Λ beliebige Indexmenge),
- (iii) $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{O}$, falls $U_i \in \mathcal{O}$ für $i = 1, \dots, N$ mit $N < \infty$.

Die Menge X mit dem System $\mathcal{O}$ heißt **topologischer Raum**. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **offen** in X , wenn $U \in \mathcal{O}$. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist. Für $x \in X$ heißt jede offene Menge U mit $x \in U$ **offene Umgebung von x** . Allgemein ist eine **Umgebung von $x \in X$** eine Menge, die eine offene Umgebung von x enthält.

Manchmal wird es klar sein, welche Mengen offen in X sind. In dem Fall reden wir von dem topologischen Raum X (obwohl zu einem topologischen Raum gehört immer eine Topologie $\mathcal{O}$). Wir werden später nur mit sogenannten Hausdorff Räumen zu tun:

Definition 1.2 Eine Topologie auf X heißt **Hausdorffsch** bzw. X heißt **Hausdorffraum***, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U bzw. V besitzen mit $U \cap V = \emptyset$.

Definition 1.3 Ein **Metrischer Raum** ist eine Menge M und eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit (für alle $x, y, z \in M$)

- $d(x, y) = d(y, x)$ *symmetrie*
- $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn $x = y$*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *dreiecks Ungleichung*

$$\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\}, \mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}.$$

*Felix Hausdorff, 1868-1942

Beispiel 1.4 Ein metrischer Raum (X, d) hat eine natürliche Topologie $\mathcal{O}_d$: Die Menge

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad (x \in X, r > 0)$$

heißt offene Kugel um x mit Radius r . Die Topologie $\mathcal{O}_d$ auf X ist dann das System aller Mengen $U \subseteq X$ mit folgender Eigenschaft: für alle $y \in U$ gibt es ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(y) \subseteq U$. Überlegen Sie:

- (i) $B_r(x) \in \mathcal{O}$ für alle $x \in X, r > 0$.
- (ii) Jedes $U \in \mathcal{O}$ ist Vereinigung von offenen Kugeln.
- (iii) $\mathcal{O}$ ist eine Topologie.
- (iv) $(M, \mathcal{O})$ ist Hausdorffraum.

Wir nennen diese Topologie die Topologie von d induziert.

Definition 1.5 Sei (X, d) metrischer Raum. $\mathcal{O}_d$ bezeichnet die Topologie wie in dem Beispiel oben definiert. $\mathcal{O}_d := \{U \mid U \text{ offen bezüglich } d\}$. $\emptyset$ definieren wir auch als offen.

Definition 1.6 $\mathbb{R}^n$ ist ein metrischer Raum mit Metrik: $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) = |x - y|$. Die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist dann die Topologie von $d_{\mathbb{R}^n}$ induziert.

Beispiel 1.7 Topologien sind nicht eindeutig. Sei X gegeben. Dann ist $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$, eine Topologie. D.h. zum Beispiel für $\mathbb{R}^n$ existieren mindestens zwei Topologien $\mathcal{O}_1 = \{\mathbb{R}^n, \emptyset\}$ und $\mathcal{O}_2$ = die von $d_{\mathbb{R}^n}$ induziert.

Definition 1.8 Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in einem topologischen Raum X heißt Basis der Topologie, wenn jede offene Menge die Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Beispiel 1.9 Sei (X, d) ein metrischer Raum $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ ist eine Basis für die Topologie $\mathcal{O}_d$. Sei $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ abzählbare, dichte Teilmenge eines metrischen Raums X . Dann ist das System $\{B_{\frac{1}{i}}(x_k) : i, k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der Topologie, die sogar abzählbar ist. Zum Beispiel hat $\mathbb{R}^n$ die abzählbare Basis $\{B_{\frac{1}{i}}(x) : i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$. //

Definition 1.10 Sei (X, d) metrischer Raum. $\mathcal{O}_d$ bezeichnet die Topologie wie in dem Beispiel oben definiert. $\mathcal{O}_d := \{U \mid U \text{ offen bezüglich } d\}$. $\emptyset$ definieren wir auch als offen.

Beispiel 1.11 Sei $\mathcal{O}$ Topologie auf X . Für $M \subseteq X$ ist dann das System

$$\mathcal{O}_M = \{U \cap M : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf M , die von $\mathcal{O}$ induzierte Topologie auf M (auch: Teilraumtopologie oder Spurtopologie). Die folgenden Aussagen sind leicht zu verifizieren:

$\mathcal{O}$ Hausdorffsch $\Rightarrow \mathcal{O}_M$ Hausdorffsch,
 $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{O}$ $\Rightarrow \mathcal{B}_M$ Basis von $\mathcal{O}_M$.

wobei hier $\mathcal{B}_M := \{M \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Zum Beispiel ist jede Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, vgl. Beispiel 1.9. Tatsächlich ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ auch metrischer Raum mit $d(x, y) = |x - y|$, und die induzierte Topologie stimmt mit der metrischen Topologie überein. //

Definition 1.12 Seien X, Y topologische Räume und $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f : U \rightarrow Y$ heißt stetig, falls folgende Implikation gilt:

$$V \text{ offen in } Y \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ offen in } X.$$

Beispiel 1.13 Sind X, Y metrische Räume, so ist Stetigkeit im Sinne von Defi 1.12 äquivalent zur Folgenstetigkeit (Übungsaufgabe). //

Beispiel 1.14 Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $M \subseteq X$, so ist die Einschränkung

$$f|_M : M \rightarrow Y, (f|_M)(x) := f(x)$$

stetig bezüglich der induzierten Topologie auf M . //

beweis Sei $V \subseteq Y$ offen. Dann ist $U = f^{-1}(V)$ offen in X . Dann gilt $(f|_M)^{-1}(V) = U \cap M$ ist offen in M per definition von der induzierten Topologie.

Definition 1.15 Seien U, V offene Teilmengen der topologischen Räume X bzw. Y . Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ heißt Homeomorphismus, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} beide stetig sind (als Abbildungen nach Y bzw. X).

Wir haben nun die erforderlichen topologischen Begriffe zusammengetragen, um mit dem Konzept der Mannigfaltigkeit zu beginnen. Die zentrale Idee ist, dass lokal Koordinaten definiert werden können.

Definition 1.16 Sei M ein topologischer Raum, und $\mathbb{R}^n$ mit der Standard Topologie versehen.

- (i) Eine n -dimensionale Karte von M ist eine Homeomorphismus $\varphi : U \rightarrow \Omega$ zwischen offenen Mengen $U \subseteq X$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (ii) Ein n -dimensionaler C^0 -Atlas von M ist ein System von n -dimensionalen Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (iii) M heißt n -dimensionale C^0 -Mannigfaltigkeit (oder topologische Mannigfaltigkeit), wenn M Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist und einen C^0 -Atlas besitzt.

Wir nennen U das **Kartengebiet** und Ω das **Parametergebiet** von φ . Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \Omega \rightarrow U$ heißt **lokale Parametrisierung**. Wichtig: Ω muss nicht unbedingt beschränkt sein: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Omega = B_1(0)$ wäre möglich.

Definition 1.17 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, und $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Wir sagen $p_k \rightarrow p$ mit $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn für alle U offen, es existiert ein $N(U) \in \mathbb{N}$, so dass $p_k \in U$ für alle $k \geq N(U)$.

Die Konvergenz von Folgen in der topologischen Mannigfaltigkeit M lässt sich wie folgt charakterisieren:

Lemma 1.18 Sei M eine C^0 Mannigfaltigkeit mit Topologie $\mathcal{O}$. $p_k \rightarrow p$ mit $k \rightarrow \infty$ genau dann, wenn für alle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ mit $p \in U$

(i) es existiert $N(U) \in \mathbb{N}$ mit $p_k \in U$ für alle $k \geq N(U)$.

(ii) $\phi(p_k) \rightarrow \phi(p)$ in $\mathbb{R}^n$ mit $k \rightarrow \infty$ ($\phi(p_k)$ ist wohldefiniert für k gross genug, wegen (i)).

Ausserdem ist der Grenzwert p eindeutig ($p_k \rightarrow p$ und $p_k \rightarrow q$ mit $p \neq q$ kann nicht vorkommen).

BEWEIS: ($\implies$) Angenommen $p_k \rightarrow p$. (i) folgt sofort, da U offen ist. $B_r(\phi(p)) \cap U \subseteq \phi(U)$ ist offen, also $\phi^{-1}(B_r(\phi(p)) \cap U)$ ist offen. Aber dann ist $p_k \in \phi^{-1}(B_r(\phi(p)) \cap U)$ für alle $k \geq N(r, p, \phi) > 0$ da $p_k \rightarrow p$. Das impliziert, dass $\phi(p_k) \in B_r(\phi(p))$ für alle $k \geq N(r, p, \phi) > 0$. $r > 0$ beliebig impliziert, dass $\phi(p_k) \rightarrow \phi(p)$ mit $k \rightarrow \infty$. ($\impliedby$) Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte die (i) und (ii) erfüllt. Sei V offen mit $p \in V$. $\phi(p) \in \phi(U \cap V)$ ist offen. Dies impliziert, es existiert $r > 0$, so dass $B_r(\phi(p)) \subseteq \phi(U \cap V)$. $\phi(p_k) \rightarrow \phi(p)$ impliziert, dass $\phi(p_k) \in B_r(\phi(p))$ für alle $k \geq N(p, \dots)$. Das impliziert, $\phi(p_k) \in \phi(U \cap V)$, also $p_k \in U \cap V \subseteq V$ für alle $k \geq N(p, \dots)$ wie erwünscht.

Die Eindeutigkeit folgt trivialerweise von der Hausdorffschen Bedingung (wähle U, V offen mit $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind fast alle p_k in U und fast alle p_k in V : Widerspruch).

Bemerkung 1.19 Zwei C^0 -Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf dem topologischen Raum M haben notwendig die gleiche Dimension. Denn zu $x \in M$ beliebig gibt es für $i = 1, 2$ Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ in $\mathcal{A}_i$ mit $x \in U_i$, also $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Somit ist die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Homeomorphismus zwischen offenen Teilmengen Euklidischer Räume, und die Behauptung ergibt sich aus folgendem Satz.

Satz 1.20 Ist $f : V \rightarrow W$ Homeomorphismus zwischen offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}^m$, so gilt $n = m$.

BEWEIS: Der Satz von der Gebietsinvarianz, der mit der Theorie des Abbildungsgrads von Brouwer bewiesen wird, besagt: ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ injektiv, so ist $f(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (ein moderner Beweis kann man bei: "J.Dugundji, Topology", Kap. XVII, Abschnitt 3 lesen. Der Beweis benutzt einiges von Alg.Topologie/Topologie und aus diesem Grund wird hier nicht bewiesen. Ursprünglich wurde der Satz von J.Brouwer bewiesen.). Wir können nun $n \geq m$ und $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ annehmen (sonst betrachte f^{-1} statt f), und f als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ auffassen. Wegen der Gebietsinvarianz ist aber dann $f(V)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Nehmen wir an, dass $n > m$. Sei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ und $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0)$ (insgesamt $\mathbb{R}^n$ einträge). Da $f(V)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist, ist $(y_1, y_2, \dots, y_m, \epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon) \in f(V)$ für ϵ klein genug: Widerspruch, da $f(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ ($m - n$ 0's am Ende).

□

Beispiel 1.21 Jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie ist n -dimensionale C^0 -Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\text{id} : \Omega \rightarrow \Omega\}$. //

Beispiel 1.22 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ ist mit der induzierten Topologie eine C^0 -Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 1$, und zwar mit folgendem Atlas:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 = M \cap \{y > 0\} &\rightarrow (-1, 1), & \varphi_1(x, y) &= x, & \varphi_1^{-1}(s) &= (s, 1 - |s|) \\ \varphi_2 : U_2 = M \cap \{x < 0\} &\rightarrow (-1, 1), & \varphi_2(x, y) &= y, & \varphi_2^{-1}(s) &= (|s| - 1, s) \\ \varphi_3 : U_3 = M \cap \{y < 0\} &\rightarrow (-1, 1), & \varphi_3(x, y) &= x, & \varphi_3^{-1}(s) &= (s, |s| - 1) \\ \varphi_4 : U_4 = M \cap \{x > 0\} &\rightarrow (-1, 1), & \varphi_4(x, y) &= y, & \varphi_4^{-1}(s) &= (1 - |s|, s). \end{aligned}$$

//

Beispiel 1.23 Das Kreuz $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$, mit der induzierten Topologie, ist keine eindimensionale C^0 -Mannigfaltigkeit (Übungsaufgabe). //

Wie kommt nun die Differenzierbarkeit ins Spiel?

Definition 1.24 Sei M ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{N} \cup \infty$.

- (i) Zwei n -dimensionale Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$, $i = 1, 2$, heißen C^k -verträglich, wenn der Koordinatenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein C^k -Diffeomorphismus ist.
- (ii) Ein n -dimensionaler C^0 -Atlas $\mathcal{A}$ heißt C^k -Atlas, wenn alle Karten in $\mathcal{A}$ untereinander C^k -verträglich sind.

Beispiel 1.25 Die n -dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ kann vom Nordpol oder vom Südpol auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ projiziert werden; man spricht von der *stereographischen Projektion*. Dabei muss natürlich der Nordpol bzw. der Südpol selbst herausgenommen werden, das heißt wir betrachten

$$U_1 = \{(x, t) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 1\}, \quad U_2 = \{(x, t) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > -1\}.$$

In Formeln lauten die beiden Abbildungen $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, t) &= \frac{x}{1-t}, & \varphi_1^{-1}(y) &= \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, -\left(\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \right) \right); \\ \varphi_2(x, t) &= \frac{x}{1+t}, & \varphi_2^{-1}(y) &= \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2} \right).\end{aligned}$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x, t) \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : -1 < t < 1\}$ und somit folgt

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Als Koordinatenwechsel ergibt sich

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{\frac{2y}{1+|y|^2}}{1 - \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}} = \frac{y}{|y|^2}.$$

Also ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein C^∞ -Atlas auf $\mathbb{S}^n$. //

Definition 1.26 *Ein n -dimensionaler C^∞ -Atlas $\mathcal{A}$ auf M heißt maximal, wenn folgende Implikation gilt:*

$\phi : U \rightarrow \Omega$ ist eine n -dimensionale Karte die mit allen Karten im $\mathcal{A}$ C^∞ -verträglich ist $\implies \phi : U \rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$.

Ein solcher Atlas heißt auch C^∞ -Struktur oder differenzierbare Struktur auf M .

Definition 1.27 *Eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (oder: differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, zusammen mit einem n -dimensionalen, maximalen C^∞ -Atlas auf M .*

In der Differentialgeometrie wird der Begriff *differenzierbar* häufig synonym mit C^∞ benutzt. Ein Satz von H. Whitney[†] besagt aber, dass ein maximaler C^k -Atlas mit $k \geq 1$ stets einen C^∞ -Atlas enthält, mit dem man dann arbeiten kann.

Um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit anzugeben, muss nicht der gesamte maximale Atlas hingeschrieben werden, sondern es reicht die Angabe eines Atlas. Dies liegt an folgendem

Lemma 1.28 *Sei $\mathcal{A}$ ein n -dimensionaler C^∞ -Atlas auf M . Sind die n -dimensionalen Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$, $i = 1, 2$, C^∞ -verträglich mit allen $\varphi \in \mathcal{A}$, so sind sie auch untereinander C^∞ -verträglich.*

BEWEIS: Zu zeigen ist, dass jeden Punkt $x_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ eine Umgebung hat, in der der Koordinatenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ glatt ist. Sei $\varphi : U \rightarrow \Omega$

[†]Annals of Math. **37** (1936), 645–680.

eine Karte aus $\mathcal{A}$ mit $y_0 = \varphi_1^{-1}(x_0) \in U$. Dann ist: $(\phi_2) \circ (\phi_1)^{-1} = \phi_2 \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ (\phi_1)^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2 \cap U) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2 \cap U)$ wohldefiniert und $\phi_2 \circ \phi^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2 \cap U) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2 \cap U)$ und $(\phi \circ (\phi_1)^{-1}) : \phi_1(U_1 \cap U_2 \cap U) \rightarrow \phi(U_1 \cap U_2 \cap U)$ sind beide C^∞ also die Verkettung ist C^∞ (ketten Regel für funktionen $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$). $\square$

Satz 1.29 *Jeder n -dimensionale C^∞ -Atlas $\mathcal{A}$ auf M ist in genau einem maximalen n -dimensionalen C^∞ -Atlas $\mathcal{A}'$ enthalten.*

BEWEIS: Wir zeigen erst die Eindeutigkeit. Seien $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ maximal mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$. Zwei Karten $\varphi' \in \mathcal{A}', \varphi'' \in \mathcal{A}''$ sind mit allen $\varphi \in \mathcal{A}$ differenzierbar verträglich, also sind φ', φ'' untereinander C^∞ -verträglich nach Lemma 1.28. Damit ist φ' mit *allen* $\varphi'' \in \mathcal{A}''$ verträglich und es folgt $\varphi' \in \mathcal{A}''$, da $\mathcal{A}''$ maximal. Dies beweist $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$ und aus Symmetriegründen gilt dann $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$.

Für die Existenz setze

$$\mathcal{A}' = \{\varphi : \varphi \text{ ist Karte, die mit } \mathcal{A} \text{ differenzierbar verträglich ist}\}.$$

Es folgt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}'$ ist C^∞ -Atlas nach Lemma 1.28. Außerdem ist $\mathcal{A}'$ maximal. $\square$
Wir wollen nun ein paar Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten betrachten.

Beispiel 1.30 Ist M eine C^0 -Mannigfaltigkeit und besteht der zugehörige Atlas $\mathcal{A}$ nur aus einer Karte $\varphi : M \rightarrow \Omega$, so ist M automatisch eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, denn die Bedingung aus Definition 1.24 ist leer. Zum Beispiel ist jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, als Karte wählt man $\text{id} : \Omega \rightarrow \Omega$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dieser Struktur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. //

Beispiel 1.31 Die n -dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, versehen mit der induzierten Topologie und mit dem durch die stereographischen Projektionen gegebenen Atlas, siehe Beispiel 1.25, ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. //

Beispiel 1.32 Das in Beispiel 1.22 betrachtete Quadrat

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$$

ist mit dem dort angegebenen Atlas eine eindimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zum Beispiel berechnet man für die ersten beiden Karten $U_1 \cap U_2 = \{(x, y) \in M : x < 0, y > 0\}$ und erhält als Koordinatenwechsel

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = (-1, 0) \rightarrow (0, 1) = \varphi_2(U_1 \cap U_2), \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(s) = 1 + s.$$

Entsprechend sind auch die anderen drei Koordinatenwechsel differenzierbar. //

Beispiel 1.33 Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n , so ist $M \times N$ kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, die Produktmannigfaltigkeit von M und N (Anwesenheitsaufgabe). //

Beispiel 1.34 Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Karte, $\phi(x) = x^3$ mit Inverse $\phi^{-1}(x) = \text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}}$. Dann ist der Atlas $A = \{\phi\}$ ein C^∞ Atlas

Um als weiteres Beispiel die projektiven Räume einzuführen, benötigen wir den Begriff der *Quotiententopologie* und der *Offenen Abbildung*.

Definition 1.35 Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X , mit der Quotientenprojektion $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $x \mapsto \pi(x) = [x]$. Dann ist auf $X/\sim$ wie folgt eine Topologie, die Quotiententopologie, definiert:

$$U \subseteq X/\sim \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen.}$$

Bezüglich der Quotiententopologie ist $\pi : X \rightarrow X/\sim$ stetig (Erinnerung: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn i) $x \sim x$, ii) $x \sim y \implies y \sim x$, iii) $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$).

Definition 1.36 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Metrischen Räumen. f heisst offen falls $f(U)$ offen in Y für alle offene U in X .

Beispiel 1.37 Definiere auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } x = \lambda y.$$

Der Quotientenraum $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ mit der Quotiententopologie heisst n -dimensionaler reell-projektiver Raum. Als Menge besteht $\mathbb{RP}^n$ einfach aus allen Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$; Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{RP}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

- Eine Menge U in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist offen genau dann, wenn U offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $0 \notin U$. Eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ kann man als $U = V \cap \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreiben, wobei V offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Das impliziert, dass U offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
- Jetzt zeigen wir $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ offen ist, also offene Mengen in offene Mengen abbildet.

U offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ impliziert, dass U offen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Das impliziert, dass $U = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_{r_\lambda}(x_\lambda)$, mit $B_{r_\lambda}(x_\lambda) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Da $\pi(U) = \cup_{\lambda \in \Lambda} \pi(B_{r_\lambda}(x_\lambda))$, sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass $\pi(B_r(x))$ offen ist, für eine beliebige offene Kugel $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Von der Definition von der Quotienten Topologie: $\pi(B_r(x))$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$

offen (in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) ist. Also, wir müssen nur zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$ offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist.

Sei $y \in \pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$. Dann ist $y = \alpha w$ für ein $w \in B_r(x)$ und ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das heisst, $|\lambda y - x| < r$, für $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, also $\varrho := r - |\lambda y - x| > 0$. Für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z \in B_{\varrho/|\lambda|}(y)$ (d.h. $|z - y| < \varrho/|\lambda|$) folgt

$$|\lambda z - x| \leq |\lambda| |z - y| + |\lambda y - x| = |\lambda| |z - y| + (r - \varrho) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &< \varrho + (r - \varrho) \\ &= r. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Das heisst, $\lambda z \in (B_r(x))$, welche $[z] = [\lambda z] \in \pi(B_r(x))$ impliziert, also $z \in \pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$. Also gilt $B_{\varrho/|\lambda|}(y) \subseteq \pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$. Also ist $\pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$ offen, wie erwünscht. Insbesondere hat die Topologie auf $\mathbb{RP}^n$ die abzählbare Basis $\{\pi(U_i) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis der Topologie auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

- Auch die Einschränkung $\pi|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ ist offen. Sei $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $p(x) = \frac{x}{|x|}$. p ist stetig und somit ist $\pi(U) = \pi(p^{-1}(U))$ offen für $U \subseteq \mathbb{S}^n$ offen.
- $\mathbb{RP}^n$ ist Hausdorff. Sei $[x_1] \neq [x_2] \in \mathbb{RP}^n$, oBdA mit $|x_1| = |x_2| = 1$. Dann gilt

$$\delta := \inf\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|\} > 0$$

(sonst ist $[x_1] = [x_2]$). (Bemerkung: hier muss man mit $\delta := \inf\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|, |x_1 + ix_2|, |x_1 - ix_2|\} > 0$ für den $\mathbb{CP}^n$ Fall arbeiten.)

Die Mengen $U_i = \pi(B_{\delta/2}(x_i) \cap \mathbb{S}^n)$ sind offen in $\mathbb{RP}^n$ mit $[x_i] \in U_i$. Wäre $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so gäbe es $y_i \in \mathbb{S}^n$, $i = 1, 2$, mit $|y_i - x_i| < \delta/2$ und $y_1 \sim y_2$. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $y_1 = \lambda y_2$, also sogar $|\lambda| = 1$ (da $y_1, y_2 \in \mathbb{S}^n$). Es folgt

$$|x_1 - \lambda x_2| \leq |x_1 - y_1| + |\lambda y_2 - \lambda x_2| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ein Widerspruch zur Definition von δ . Damit ist die Hausdorff-Eigenschaft gezeigt.

- Konstruktion von Karten

Für $i = 1, \dots, n+1$ und $U_i = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \neq 0\})$ (offene Mengen in $\mathbb{RP}^n$) betrachte nun

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_i([x]) = \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}), \\ \psi_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow U_i, \psi_i(\xi) = \pi(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n). \end{aligned}$$

Die Abbildungen φ_i, ψ_i sind zueinander invers, und ψ_i ist offensichtlich stetig (da sie die Verkettung von zwei stetigen Funktionen ist). Die Stetigkeit von φ_i folgt aus $\varphi_i^{-1}(V) = \pi(p_i^{-1}(V))$ für $V \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei

$$p_i : \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, p_i(x) = \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).$$

(

$$p_i^{-1}((\xi^1, \dots, \xi^n)) = \{c(\xi^1, \dots, (\xi^i)^{i-1}, 1, (\xi^i)^{i+1}, \dots, \xi^n) | c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

und so $(\phi_i)^{-1}(V) = \psi_i(V) = \{\pi(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^{i+1}, \dots, \xi^n) | (\xi^1 \dots \xi^n) \in V\} = \pi \circ (p_i)^{-1}(V)$.) Für $i > j$ erhalten wir die Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$,

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) &= \varphi_j \circ \psi_i(\xi^1, \dots, \xi^n) \\ &= \varphi_j(\pi(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n)) \\ &= \frac{1}{\xi^j} (\xi^1, \dots, \xi^{j-1}, \xi^{j+1}, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n) \end{aligned} \quad (1.3)$$

und $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) | \xi^j \neq 0\}$, $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) | \xi^{i-1} \neq 0\}$.

Für $i < j$ bekommen wir:

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) &= \varphi_j \circ \psi_i(\xi^1, \dots, \xi^n) \\ &= \varphi_j(\pi(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n)) \\ &= \frac{1}{\xi^{j-1}} (\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^{j-2}, \xi^j, \dots, \xi^n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

mit $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) | \xi^{j-1} \neq 0\}$, und $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) | \xi^i \neq 0\}$.

Die Kartenwechsel sind damit C^∞ -Funktionen und bilden einen C^∞ Atlas für $\mathbb{RP}^n$, und damit ist $\mathbb{RP}^n$, eine C^∞ Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1.38 Der komplex-projektive Raum wird völlig analog definiert als $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, wobei

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } z = \lambda w.$$

Eine Analyse des vorangehenden Beispiels zeigt, dass die Überlegungen vollständig übernommen werden können. Insbesondere ist die Projektion $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ offen, die Quotiententopologie hat eine abzählbare Basis und ist Hausdorffsch. Die Kartenabbildungen bilden nun nach $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ab, und die Kartenwechsel sind von der Form (im Fall z.B. $i > j$)

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \setminus \{\zeta^j = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{\zeta^{i-1} = 0\}, \xi \mapsto \frac{1}{\zeta_j} (\zeta^1, \dots, \zeta^{j-1}, \zeta^{j+1}, \dots, \zeta^{i-1}, 1, \zeta^{i+1}, \dots, \zeta^n).$$

Dies sind wieder C^∞ -Diffeomorphismen von offenen Gebieten im $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, also ist $\mathbb{CP}^n$ eine kompakte, $2n$ -dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Tatsächlich sind die Kartenwechsel sogar komplex differenzierbar, und damit ist $\mathbb{CP}^n$ eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. //

Der folgende Satz hilft uns einer Mannigfaltigkeit zu konstruieren, wenn wir nur Abbildungen gegeben sind (die die Karten die Mannigfaltigkeit werden sein soll).

Satz 1.39 *Sei M eine Menge und $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ein System von bijektiven Abbildungen von $U_\lambda \subseteq M$ auf offene Mengen $V_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$. Es gelte:*

- (1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$.
- (2) $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ ist offen für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$.
- (3) $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ ist stetig für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M , so dass $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein C^0 -Atlas ist. Wird M durch eine abzählbare Teilfamilie $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$ überdeckt, so hat $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass M eine C^0 -Mannigfaltigkeit ist, ist im Einzelfall noch die Hausdorff-Eigenschaft nachzuweisen!

BEWEIS: (von Satz 1.39) Wir definieren die gesuchte Topologie durch

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq M : \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen für alle } \lambda \in \Lambda\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, wie sich aus folgenden Tatsachen ergibt:

- (i) $\varphi_\lambda(M \cap U_\lambda) = V_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen nach Voraussetzung. Also, $M \in \mathcal{O}$. $\varphi_\lambda(\emptyset \cap U_\lambda) = \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen, also $\emptyset \in \mathcal{O}$.
- (ii) Sei $W_\alpha \subseteq M$, $\alpha \in A$. $W_\alpha \subseteq \mathcal{O}$ impliziert $\varphi_\lambda(W_\alpha \cap U_\lambda)$ ist offen (per defn.). Das impliziert $\varphi_\lambda((\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha) \cap U_\lambda) = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\lambda(W_\alpha \cap U_\lambda)$ ist offen. Also, $(\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha)$ ist offen.
- (iii) Für $W_i \subseteq M$, $i = 1, \dots, N$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcap_{i=1}^N W_i) \cap U_\lambda) = \bigcap_{i=1}^N \varphi_\lambda(W_i \cap U_\lambda)$. W_i in $\mathcal{O}$ impliziert, dass $(\bigcap_{i=1}^N W_i) \in \mathcal{O}$.

Bezüglich $\mathcal{O}$ sind die Mengen U_λ offen nach Voraussetzung (2). Weiter ist $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ stetig, denn für $V \subseteq V_\lambda$ offen und $\mu \in \Lambda$ ist

$$\varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\mu) = \underbrace{(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu))}_{(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})^{-1}} \quad \underbrace{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)}_{\text{offen}}$$

offen (hier wurde benutzt, dass $(\varphi_\lambda)^{-1}(V) \subseteq U_\lambda$ und dass Bedingung (3) gilt). Schließlich ist $\varphi_\lambda^{-1} : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$ nach Definition stetig, denn für $U \in \mathcal{O}$ mit $U \subseteq U_\lambda$ ist $\varphi_\lambda(U) = \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)$ offen, da $U \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn $\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist (per defn von $\mathcal{O}$). Damit sind die $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ Homeomorphismen und bilden einen C^0 -Atlas auf M .

Sei $\mathcal{O}'$ eine Topologie, so dass die $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ Homeomorphismen sind (insbesondere, müssen $U_\lambda \in \mathcal{O}'$ für alle λ , da $\varphi_\lambda^{-1}(V_\lambda) = U_\lambda$ und φ_λ stetig). Für $U \in \mathcal{O}$ folgt dann

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{\varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda))}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \in \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'.$$

Ist umgekehrt $U \in \mathcal{O}'$, so ist $U \cap U_\lambda \in \mathcal{O}'$ und $\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)$ ist offen, für alle $\lambda \in \Lambda$ (für ein Homeo $f : V \rightarrow W$ ist $f(U)$ U offen auch offen: $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ ist offen). Dies bedeutet $U \in \mathcal{O}$ (per definition von $\mathcal{O}$) bzw. $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$.

Schließlich gelte $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ mit Λ' abzählbar. Jedes V_λ hat eine abzählbare Basis $\{V_{\lambda,i} : i \in \mathbb{N}\}$ bzgl. der Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{U_{\lambda,i} = \varphi^{-1}(V_{\lambda,i}) : i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis für U_λ und somit $\{U_{\lambda,i} : \lambda \in \Lambda', i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{O}$ auf M . $\square$

Definition 1.40 Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn für $A \subseteq X$ folgende Implikation gilt:

$$A \text{ offen und abgeschlossen, } A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = X.$$

Mit anderen Worten besagt die Definition: es gibt keine nichttriviale Zerlegung von X in offene Mengen.

Beispiel 1.41 Das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Denn sei $A \subseteq [0, 1]$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Dann sei $a \in A \subseteq [0, 1]$, $a \neq 0, 1$. Sei $s = \inf\{r < a : (r, a) \subseteq A\}$, und $t = \sup\{r > a : (a, r) \subseteq A\}$. Da A offen in $[0, 1]$ ist, ist $s < a$ und $t > a$ wohldefiniert. Da A abgeschlossen in $[0, 1]$ ist, ist $s \in A$ und $t \in A$. Wenn $s \neq 0$ dann benutze die Offenheit von A wieder, um zu zeigen, dass es existiert $0 \leq \tilde{s} < s$ mit $(\tilde{s}, a) \subseteq A$, welche ein Widerspruch zur Defn. von s ist. Also $s = 0$. Ähnlich zeigen wir, dass $t = 1$. In dem Fall, dass $a = 0$ dann definieren wir nur t und zeigen (wie oben), dass $t = 1$. In dem Fall, dass $a = 1$ dann definieren wir nur s und zeigen (wie oben), dass $s = 0$. $\quad //$

Definition 1.42 Sei X topologischer Raum, und $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg von x_0 nach x_1 ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([0, 1], X)$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Wenn es einen solchen Weg gibt, so heißen x_0, x_1 verbindbar. X heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ verbindbar sind.

Lemma 1.43 Sei X ein topologischer Raum.

- (i) „verbindbar“ ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten.
- (ii) X wegzusammenhängend $\Rightarrow X$ zusammenhängend.

BEWEIS: Für (i) prüfen wir die drei Eigenschaften:

$x \sim x$: wähle $\gamma(t) \equiv x$ für alle $t \in [0, 1]$.

$x_0 \sim x_1 \Rightarrow x_1 \sim x_0$: sei γ Weg von x_0 nach x_1 ; wähle $\sigma(t) = \gamma(1 - t)$ für $t \in [0, 1]$.

$x_0 \sim x_1, x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$: Seien γ_1, γ_2 Wege von x_0 nach x_1 bzw. x_1 nach x_2 . Wähle

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für (ii) sei $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen, und $x_0 \in A$. Sei $x \in X$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg γ von x_0 nach x . Dann ist $\gamma^{-1}(A) \subseteq [0, 1]$ offen und abgeschlossen, sowie $0 \in \gamma^{-1}(A)$. Nach Beispiel 1.41 ist dann $\gamma^{-1}(A) = [0, 1]$ und damit gilt $x = \gamma(1) \in A$, also $A = X$. da x beliebig war. $\square$

Lemma 1.44 Sei X, Y Topologischer Räume, und sei X zusammenhängend (bez. wegzusammenhängend), und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ mit der induzierten Topologie zusammenhängend (bez. wegzusammenhängend).

Beweis i) Sei $A \subset f(X)$ mit A offen und abgeschlossen, $A \neq \emptyset$. Also, $A = U \cap f(X)$ und $A = G \cap f(X)$ wobei U offen in Y ist, und G abgeschlossen in Y ist. Dann ist $f^{-1}(A) = f^{-1}(G)$ abgeschlossen, und $f^{-1}(A) = f^{-1}(U)$ ist offen, also $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen und offen in X und $f^{-1}(A)$ ist nicht leer, da A eine nichtleere Teilmenge von $f(X)$ ist. Widerspruch.

ii) Sei $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \in f(Y)$. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ (existiert, da X wegzusammenhängend). Dann ist $\sigma : [0, 1] \rightarrow f(X), \sigma(t) = f \circ \gamma(t)$ stetig und $\sigma(0) = y_1, \sigma(1) = y_2$ ($\sigma^{-1}(f(X) \cap U) = \gamma^{-1} \circ f^{-1}(f(X) \cap U) = \gamma^{-1}f^{-1}(U)$). $\square$

Die folgende Aussage beruht darauf, dass eine Mannigfaltigkeit *lokal* wegzusammenhängend ist.

Satz 1.45 Sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

$$M \text{ wegzusammenhängend} \Leftrightarrow M \text{ zusammenhängend.}$$

BEWEIS: Es ist nur noch die Aussage „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen. Der Beweis beruht darauf, dass M lokal wegzusammenhängend ist. Wähle nämlich zu $x \in M$ eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $x \in U$. Für $r > 0$ hinreichend klein gilt $B_r(\varphi(x)) \subseteq V$, und $U_x := \varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))$ ist wegzusammenhängend (von Lemma oben), da $\phi^{-1} : (B_r(\phi(x)) \rightarrow \phi^{-1}(B_r(\phi(x))))$ ist eine stetige Abbildung.

Sei nun $x_0 \in M$ beliebig und A die Wegkomponente von x_0 . Ist $x \in A$ und $y \in U_x$, also $x_0 \sim x$ und $x \sim y$, so folgt $x_0 \sim y$ bzw. $U_x \subseteq A$. Also ist A offen. Sei umgekehrt $x \in M \setminus A$. Angenommen $U_x \cap A \neq \emptyset$, d.h. es gibt $y \in U_x \cap A$. Dann gilt $x_0 \sim y$ und $y \sim x$, folglich $x_0 \sim x$, Widerspruch. Dies bedeutet $U_x \cap A = \emptyset$ oder in andern Worten $U_x \subseteq M \setminus A$, also $M \setminus A$ ist offen, d.h. A abgeschlossen. Wegen $x_0 \in A$ (A ist nicht leer) und M zusammenhängend folgt $A = M$, das heißt M ist wegzusammenhängend. $\square$

Beispiel 1.46 Die folgende Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend:

$$M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

//

2 Differenzierbare Abbildungen und Überlagerungen

Definition 2.1 Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n . Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt k -mal stetig differenzierbar (wobei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$), wenn es zu jedem $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ mit $p \in U$ und eine Karte $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ gibt*, so dass $f(U) \subseteq V$ und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$.

Bild

Notation: $f \in C^k(M, N)$ bzw. $f \in C^k(M)$ im Fall $N = \mathbb{R}$ (versehen mit der Standardstruktur).

Bemerkung. Seien $\varphi' : U' \rightarrow \varphi(U')$ bzw. $\psi' : V' \rightarrow \psi(V')$ irgendwelche Karten im jeweiligen maximalen Atlas. Ist $f \in C^k(M, N)$ und $f(U') \subseteq V'$, so folgt $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \in C^k(\varphi'(U'))$. Das zeigt man wie folgt: Sei $x_0 \in \varphi'(U')$ und sei $p = (\varphi')^{-1}(x_0)$. Wähle $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ wie in Definition 2.1 mit $p \in U$ und $f(p) \in V$. Die Behauptung ergibt sich wie folgt: $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = \psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U \cap U') \rightarrow \psi'(V \cap V')$ ist wohldefiniert und C^∞ durch die Kettenregel. $\varphi'(U \cap U')$ ist eine Umgebung von x_0 also ist $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \in C^\infty$ in x_0 . x_0 war beliebig in $\varphi'(U')$ also sind wir fertig.

Beispiel 2.2 Betrachte $\mathbb{S}^n$ mit den Karten φ_1, φ_2 aus Beispiel 1.25 (stereographische Projektion von Nordpol bzw. Südpol). Für $\lambda > 0$ sei

$$\tau_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tau_\lambda(x) = \lambda x.$$

*jeweils im maximalen C^∞ -Atlas von M bzw. N

Definiere nun $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ wie folgt:

$$\sigma_\lambda(p) = \begin{cases} (\varphi_1^{-1} \circ \tau_\lambda \circ \varphi_1)(p) & \text{falls } p \neq (0, 1) \\ (0, 1) & \text{falls } p = (0, 1). \end{cases}$$

wobei hier benutzen wir die Notation von der Stereo. Beispiel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \mathbb{R}$
 $S^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \mathbb{R} \mid |x|^2 + t^2 = 1\}$, $U_1 = \{(x, t) \in S^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 1\}$, $U_2 = \{(x, t) \in S^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > -1\}$, $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $\varphi_1(x, t) = \frac{x}{1-t}$, $\varphi_2(x, t) = \frac{x}{1+t}$. Wir zeigen, dass σ_λ eine C^∞ -Abbildung ist: für $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_1) \subseteq U_1$ und

$$\varphi_1 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_1^{-1} = \tau_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Für $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_2) \subseteq U_2$ und

$$\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \tau_\lambda \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

(Bemerkung: $\sigma_{la}(p) = (0, -1)$ genau dann, wenn $\sigma_{la}(\phi^{-1}(p)) = 0$ genau dann, wenn $p = S$ impliziert $p \in U_2$, also $\sigma_{la}(U_2) \subset U_2$) Nach Beispiel 1.25 ist $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = x/|x|^2$, also folgt für $x \neq 0$

$$(\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1})(x) = \frac{\tau_\lambda(x/|x|^2)}{|\tau_\lambda(x/|x|^2)|^2} = \frac{1}{\lambda}x.$$

Insgesamt folgt $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere für $x = 0$, also ist $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty$. Insgesamt impliziert dass, das $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ C^∞ ist. //

Definition 2.3 Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt C^k Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist, und f, f^{-1} von der Klasse C^∞ sind.

Beispiel 2.4 Die Abbildung $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist ein Diffeomorphismus, denn $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}$. //

Beispiel 2.5 Betrachte auf $\mathbb{R}$ die beiden Atlanten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = x\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x^3\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definieren verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$, denn die Karten sind nicht einmal C^1 -verträglich (geschweige denn C^∞):

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto s^3 \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{t} & t \geq 0 \\ \sqrt[3]{-t} & t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist nicht differenzierbar in $t = 0$. Das bedeutet, dass die differenzierbaren Strukturen nicht gleich (wenn die Gleich wären, dann müssten die zwei C^∞ verträglich miteinander sein). Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ist aber ein Diffeomorphismus! Denn

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} &= \text{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ \varphi_1 \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1} &= \text{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

//

Auf der Menge der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (mit maximalen Atlanten) ist

$$M \sim N \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ diffeomorph } N$$

eine Äquivalenzrelation; ihre Äquivalenzklassen heißen Diffeomorphietypen. Bekanntlich ist auch

$$M \sim_t N \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ homeomorph } N$$

eine Äquivalenzrelation; ihre Äquivalenzklassen heißen Homeomorphietypen. Die zweite hängt nur von der Topologie ab, und hat nichts mit der differenzierbaren Struktur (also ein maximaler Atlas) zu tun.

Natürlich ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit insbesondere eine C^0 Mannig. (manchmal **topologische Mannigfaltigkeit** genannt) mit einer Topologie. Es ist eine sehr schwierige Frage, wieviele verschiedene Mannigfaltigkeiten – im Sinn von nicht homeomorph oder nicht diffeomorph – es in der jeweiligen Dimension gibt. Hier nur einige Ausblicke ohne Beweis, wobei wir stets von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ausgehen:

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen differenzierbaren Atlas besitzen. Das erste Beispiel einer 10-dimensionalen Mannigfaltigkeit stammt von Kervaire (1960). Donaldson fand 1984 vierdimensionale Beispiele, indem er den Lösungsraum einer gewissen partiellen Differentialgleichung aus der Elementarteilchenphysik untersuchte, nämlich der Yang-Mills-Gleichung.
- Es gibt Beispiele von topologischen Mannigfaltigkeiten, die mehrere, nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen besitzen. So gibt es auf der 7-dimensionalen Sphäre 28 verschiedene differenzierbare Strukturen (Milnor 1964). Und 1984 zeigte Gompf (aufbauend auf den Resultaten von Donaldson) die Existenz überabzählbar vieler, nicht diffeomorpher C^∞ -Strukturen auf $\mathbb{R}^4$!
- Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist die einzige kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit sowohl im C^0 -Sinn als auch im C^∞ -Sinn. Die einzige nichtkompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}$. Den C^∞ -Fall werden wir als Aufgabe beweisen. Im zweidimensionalen Fall gibt es folgende Klassifikation von kompakten, zusammenhängenden Flächen:

Satz 2.6 (Flächen Klassifikation: Poincaré) Sei M^2 eine kompakte, zusammenhängende C^0 Mannigfaltigkeit. Dann ist M^2 (orientierbar) die Sphäre, den Torus, die Brezel (2 Löcher), oder usw. (Die Fläche mit zwei Löchern kann aus 2 Tori konstruiert werden, indem man aus diesen jeweils eine kleine Kreisscheibe entfernt und sie dann durch Einsetzen eines Zylinderstücks verbindet (Konstruktion der zusammenhängenden Summe)). Entsprechend kann die Fläche mit p Löchern als zusammenhängende Summe von p Tori aufgefasst werden.

B i l d

oder (nicht orientierbar) die zusammenhängende Summe von projektiven Ebenen.

Auf diese Weise erhält man eine komplette Liste aller kompakten, zusammenhängenden, zweidimensionalen Typen von Flächen, wobei wieder zwischen *homeomorph* und *diffeomorph* kein Unterschied besteht. Der Beweis ist aber schon weitaus schwieriger, im differenzierbaren Fall folgt die Aussage aus dem Uniformisierungssatz von Poincaré aus der komplexen Analysis. Für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es ein Programm von Thurston, die kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ebenfalls in gewisse Grundbausteine zu zerlegen. Dies ist Gegenstand der aktuellen Forschung. In den letzten Jahren gab es einen Beweis von Thurstons Vermutung (dass man 3-Mannigfaltigkeiten zerlegen kann in bekannten stücken) von Hamilton/Perelman mit Hamilton's Ricci Fluss und sogenannten Surgery (Chirurgie):

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ricci}(g(t)).$$

Der Begriff der Ricci Krümmung wird in DGII definiert/untersucht.

Lemma 2.7 Die Verkettung von C^k -Abbildungen ist wieder eine C^k -Abbildung, das heißt

$$f \in C^k(M, N), g \in C^k(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^k(M, P). \quad (2.1)$$

Beweis: Wähle zu $p \in M$ Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ auf M , $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ auf N und $\chi : W \rightarrow \chi(W)$ auf P , so dass $p \in U$, $f(p) \in V$ und $g(f(p)) \in W$. Wir können annehmen, dass $f(U) \subseteq V$ und $g(V) \subseteq W$, andernfalls ersetze erst V durch $V \cap g^{-1}(W)$ und dann U durch $U \cap f^{-1}(V)$. Dann gilt: $\chi \circ g \circ f \circ \phi^{-1} = \chi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ und $\chi \circ g \circ \psi^{-1} \in C^k(\psi(V), \chi(W))$ und $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \in C^k(\phi(U), \psi(V))$ Behauptung (2.1) folgt dann aus der C^k -Kettenregel. Bild. $\square$.

Satz 2.8 Die Menge $\text{Diff}(M)$ der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M ist eine Untergruppe der Bijektionen von M .

BEWEIS: Für $f, g \in \text{Diff}(M)$ ist $g^{-1} \circ f \in \text{Diff}(M)$ wegen (2.1). $\square$

Definition 2.9 Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf der Mannigfaltigkeit M , falls gilt:

- (i) $g(p) \neq p$ für alle $p \in M$, $g \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$.
- (ii) Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es offene Umgebungen $p \in U_{p,q}$ bzw. $q \in V_{p,q}$, so dass $g(U_{p,q}) \cap V_{p,q} = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma$ mit $g(p) \neq q$.

□

Bemerkung 2.10 Bei Bedingung (ii) ist $p = q$ erlaubt. In dem Fall kann man o.B.d.A annehmen, dass $U = V$ (sonst ersetze U und V beide durch $U \cap V$).

Bemerkung 2.11 Nehmen wir an, dass die Topologie auf M durch eine Metrik $d(\cdot, \cdot)$ induziert, bezüglich der die Gruppe Γ isometrisch operiert, das heißt

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M, g \in \Gamma.$$

Ist dann für gegebene $p, q \in M$

$$\delta_{pq} := \inf\{d(g(p), q) : g \in \Gamma, g(p) \neq q\} > 0, \quad (2.2)$$

so ist die Bedingung (ii) in Definition 2.9 erfüllt mit $U = B_{\delta/2}(p)$, $V = B_{\delta/2}(q)$. Denn wäre $x \in g(U) \cap V$ für ein $g \in \Gamma$ mit $g(p) \neq q$, so folgt $d(g(p), x) = d(p, g^{-1}(x)) < \delta/2$ wegen $g^{-1}(x) \in U = B_{\delta/2}(p)$, und hieraus

$$d(g(p), q) \leq d(g(p), x) + d(x, q) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ein Widerspruch zu (2.2). Insbesondere ist Bedingung (ii) in Definition 2.9 immer erfüllt, wenn eine endliche Gruppe bzgl. einer Metrik isometrisch operiert.

Beispiel 2.12 Die Gruppe $\Gamma = \{\text{id}\}$ mit zwei Elementen operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Denn es gilt $-p \neq p$ für alle $p \in \mathbb{S}^n$, und Γ operiert isometrisch bzgl. $d(p, q) = |p - q|$. //

Beispiel 2.13 Die Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^n$ durch Translationen:

$$\tau_k(p) = p + k \quad \text{für } p \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Die Operation ist trivialerweise frei, und isometrisch zum Beispiel bezüglich der Metrik $d(p, q) = \|p - q\|_\infty$. Es ist leicht zu sehen, dass Bedingung (2.2) erfüllt ist, das heißt es gilt

$$\delta := \inf\{\|p + k - q\|_\infty : k \in \mathbb{Z}^n, p + k \neq q\} > 0.$$

//

Definition 2.14 Für eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ ist durch

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \Gamma \text{ mit } g(p) = q$$

ein Äquivalenzrelation auf M gegeben. Die Menge der Äquivalenzklassen, versehen mit der Quotiententopologie, wird mit M/Γ bezeichnet.

Definition 2.15 Eine stetige und surjektive Abbildung $\pi : M \rightarrow X$ zwischen topologischen Räumen heißt Überlagerung, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

mit $V_i \subseteq M$ offen, paarweise disjunkt und $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ homeomorph.

Beispiel 2.16 Sei $M^2 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist $\pi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Überlagerung mit $\pi(x, y, z) = (x, y)$. $\pi^{-1}(B_1((x, y))) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} B_1((x, y)) \times \{z\}$

Bemerkung 2.17 Sei $\pi : M \rightarrow X$ Überlagerung und X zusammenhängend. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist die Menge

$$X_k = \{x \in X : \text{card } \pi^{-1}\{x\} = k\}$$

offen. Denn für $x \in X_k$ gilt $U \subseteq X_k$ mit U wie in Definition 2.15 $x \in U$ ($\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$ paarweise disjunkt impliziert, dass $\text{card } (\pi^{-1}(y)) = \Lambda$ für alle $y \in U$ insbesondere für $y = x$). Wähle nun $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $X_k \neq \emptyset$, dann ist $X \setminus X_k = \bigcup_{l \neq k} X_l$ offen, also $X = X_k$ nach Voraussetzung bzw. $\text{card } \pi^{-1}\{x\} \equiv k$ für alle $x \in X$. Man bezeichnet k als den Grad der Überlagerung π .

Definition 2.18 Sei $f : M^m \rightarrow N^m$ eine C^k Abbildung. f heißt lokaler C^k Diffeomorphismus, wenn für alle $p \in M$ existiert es eine Umgebung U von $p \in U$, so dass $f|_U : U \rightarrow f(U)$ ein C^k Diffeomorphismus ist

Beispiel 2.19 $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ist ein lokaler Diffeo. ÜA.

Satz 2.20 Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ frei und eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gelten folgende Aussagen:

- (a) $X = M/\Gamma$ ist Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, und die Projektion $\pi : M \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.
- (b) Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf X , so dass π lokal diffeomorph ist.

BEWEIS:

- $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ ist offen.

Für $V \subseteq M$ gilt $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(V)$, folglich ist die Projektion $\pi : M \rightarrow X$ offen (da g ein Diffeo. ist, welche $g(V)$ offen impliziert).

- M/Γ ist Hausdorff.

Seien $p, q \in M$ mit $[p] \neq [q]$. ($[p] = \pi(p)$). Für $U = U_{p,q}$, $V = V_{p,q}$ wie in Definition 2.9(ii) sind $\pi(U)$, $\pi(V)$ offene Umgebungen der Punkte $\pi(p)$, $\pi(q) \in X$ (von Schritt 1). Wäre $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, so gibt es $p' \in U$, $q' \in V$ mit $\pi(p') = \pi(q')$,

also $g(p') = q'$ für ein $g \in \Gamma$. Aber $g(p) \neq q$ wegen $\pi(p) \neq \pi(q)$, also gilt $g(U) \cap V = \emptyset$ nach Wahl von U, V (Bedingung (ii)), ein Widerspruch.

- M/Γ hat eine abzählbare Basis.

Eine abzählbare Basis der Topologie von M/Γ erhält man durch Projektion einer abzählbaren Basis der Topologie von M .

- Beweis von (a) Wie in Bemerkung 2.10 (Fall $p = q$ in Bedingung (ii)) erwähnt, erhalten wir zu $p \in M$ eine offene Umgebung $p \in U$ mit $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma$ mit $g(p) \neq p$. Aber, $g(p) \neq p$ für alle $g \in \Gamma \setminus \{id\}$ (wegen Bedingung (i) in Defn.) Das impliziert: $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \setminus \{id\}$. Dann gilt $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(U)$, wobei $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ für alle $g_1, g_2 \in \Gamma$ mit $g_1 \neq g_2$; andernfalls wäre $(g_2^{-1} \circ g_1)(U) \cap U \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von U . Für $g \in \Gamma$ ist $g(U)$ offen sowie $\pi : g(U) \rightarrow \pi(U)$ stetig, offen und bijektiv. Denn wäre $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ für $q_i \in g(U)$, $q_1 \neq q_2$, so folgt $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ für $p_i = g^{-1}(q_i) \in U$, sowie $p_1 \neq p_2$. Es gibt also $g' \in \Gamma$ mit $g'(p_1) = p_2$ und $p_1 \neq p_2$. Das impliziert, dass $g' \neq id$. D.h. $g'(U) \cap U \neq \emptyset$, und $g' \in \Gamma \setminus \{id\}$: ein Widerspruch zur Wahl von U . Damit ist Behauptung (a) bewiesen.

Als nächstes konstruieren wir die gesuchte differenzierbare Struktur. Wie bereits gezeigt, gibt es zu $p \in M$ eine Umgebung U_p mit folgenden Eigenschaften:

- $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \setminus \{id\}$
- es gibt eine Karte $\psi_p : U_p \rightarrow W_p \subseteq \mathbb{R}^m$.

Definiere nun auf X die Karten

$$\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1} : \pi(U_p) \rightarrow \psi_p(U_p) \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.3)$$

Die φ_p sind homeomorph, und es bleibt nur die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} : \phi_p(\pi(U_p) \cap \pi(U_q)) \rightarrow \phi_q(\pi(U_p) \cap \pi(U_q))$ zu zeigen.

Sei $\pi(p') = \pi(q')$ für $p' \in U_p$, $q' \in U_q$, (sonst ist $\pi(U_p) \cap \pi(U_q) = \emptyset$ und so es gibt nicht's zu zeigen) also $q' = g(p')$ mit einem $g \in \Gamma$. Wir zeigen, dass $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ ist C^∞ in eine Umgebung des Punkts $\phi_p(\pi(p')) = \psi_p(p')$. Setze $p' \in U'_p := U_p \cap g^{-1}(U_q)$ und $U'_q := U_q \cap g(U_p)$. Es gilt $g(U'_p) = U'_q$ und

$$\pi|_{U_q} \circ g = \pi|_{U_p} \text{ auf } U'_p \quad \Rightarrow \quad (\pi|_{U_q})^{-1} \circ \pi|_{U_p} = g \text{ auf } U'_p.$$

Daraus folgt

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} = (\psi_q \circ (\pi|_{U_q})^{-1}) \circ (\psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1})^{-1} = \psi_q \circ g \circ \psi_p^{-1} \quad \text{auf } \psi_p(U'_p).$$

Die rechte Seite ist die Koordinatendarstellung des Diffeomorphismus g , also in C^∞ .

Sei schließlich $\mathcal{A}$ ein Atlas auf X , so dass $\pi : M \rightarrow X$ lokal diffeomorph ist. Dann ist für jede Karte $\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ in $\mathcal{A}$ und jede Karte $\psi_p : U_p \rightarrow \psi_p(U_p)$ die zugehörige Koordinatendarstellung

$$\varphi \circ \pi \circ \psi_p^{-1} : \varphi_p(\pi(U_p) \cap \Omega) \rightarrow \varphi(\pi(U_p) \cap \Omega)$$

diffeomorph. Wegen $\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}$ bedeutet dies, dass die Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_p^{-1}$ differenzierbar sind, d. h. $\mathcal{A}$ definiert dieselbe differenzierbare Struktur.

□

Beispiel 2.21 Seien $\pi_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \{\text{id}\}$ bzw. $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Projektionsabbildungen, siehe auch Beispiel 1.37. Die Abbildung

$$f : \mathbb{S}^n / \{\text{id}\} \rightarrow \mathbb{RP}^n, f(x) = f([x]_{\pi_1}) = [x]_{\pi_2} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

ist offensichtlich wohldefiniert und bijektiv, und wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \subseteq & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{S}^n / \{\text{id}\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

Wir nennen $\subseteq \text{ink} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann gilt f ist ein Homeomorphismus, denn einerseits gilt für $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ offen

$$\pi_1^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi_1)^{-1}(U) = \pi_2^{-1}(U) \cap \mathbb{S}^n = \text{offen in } \mathbb{S}^n.$$

Jetzt benutze, dass T offen in $\mathbb{S}^n / \{\text{id}\}$ genau dann, wenn $\pi_1^{-1}(T)$ offen ist. D.h. $T = f^{-1}(U)$ ist offen.

Andererseits gilt für $V \subseteq \mathbb{S}^n / \{\text{id}\}$

$$\pi_2^{-1}(f(V)) \cap \mathbb{S}^n = (f \circ \pi_1)^{-1}(f(V)) = \pi_1^{-1}(V).$$

Für $V \subseteq \mathbb{S}^n / \{\text{id}\}$ offen ist damit $\pi_2^{-1}(f(V)) \cap \mathbb{S}^n$ offen in $\mathbb{S}^n$, das heißt $\pi_2^{-1}(f(V))$ offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, also $f(V)$ offen in $\mathbb{RP}^n$ (definition: $\pi_2^{-1}(T)$ offen g.d.w T offen ist). Jetzt ist noch die Differenzierbarkeit von f und f^{-1} zu zeigen. Zu diesem Anlass führen wir einen neuen Atlas auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ein, und zwar betrachten wir für $i = 1, \dots, n+1$ und $\sigma = 1, -1$

$$\varphi_i^\sigma : U_i^\sigma = \{x \in \mathbb{S}^n : \text{sign}(x^i) = \sigma\} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{x^i}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$(\varphi_i^\sigma)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i^\sigma, \xi \mapsto \frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n).$$

Aus den Formeln folgt, dass es sich hierbei um einen differenzierbaren Atlas handelt und dass die Karten mit den stereographischen Projektionen differenzierbar verträglich sind. Verwenden wir auf $\mathbb{R}P^n$ die Koordinaten aus Beispiel 1.37, i.e.

$$\varphi_i : \{[x] \in \mathbb{R}P^n : x^i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_i([x]) = \frac{1}{x^i}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}) \text{ für } i = 1, \dots, n+1.$$

Sei $p \in U_i^\sigma$. Die Koordinaten für $S^2 \setminus \{id\}$ in eine Umgebung $V = \pi_1(W_p)$ von $\pi_1(p)$ sind dann (wie in dem Beweis definiert: siehe (2.3)) $\phi_p : \pi_1(W_p) \rightarrow \varphi_i^\sigma(W_p)$, $\phi_p = \varphi_i^\sigma \circ (\pi|_{W_p})^{-1}$. Mit diesen Koordinaten bekommen wir $\varphi_i \circ f \circ (\phi_p)^{-1} = \varphi_i \circ f \circ (\pi_1|_{W_p}) \circ (\varphi_i^\sigma)^{-1}$ mit Definitionsbereich $\varphi_i^\sigma(W_p)$ (offene Menge) und Bild eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ enthalten. Aber $\varphi_i \circ f \circ (\pi_1|_{W_p}) \circ (\varphi_i^\sigma)^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) = \varphi_i \circ f \circ \pi_1(\frac{\sigma}{\sqrt{1+|\psi|^2}}(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n)) = \varphi_i([(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \dots, \xi^n)]_{\pi_2}) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$. Es folgt direkt, dass $(\phi_p) \circ f^{-1} \circ (\varphi_i)^{-1} = id$ auf sein Definitionsbereich (offene Menge). Also f ist ein Diffeo. //

Definition 2.22 Sei X wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine Schleife in x_0 ist eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = c(1) = x_0$. Zwei Schleifen c_0, c_1 in x_0 heißen homotop (mit festem Basispunkt x_0), wenn es eine Abbildung $h \in C^0([0, 1] \times [0, 1], X)$ gibt mit den Eigenschaften

$$h(\cdot, 0) = c_0, h(\cdot, 1) = c_1 \text{ und } h(0, t) = h(1, t) = x_0 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Zwischen den möglichen Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit X und der Menge der Homotopieklassen von Schleifen in X besteht ein enger Zusammenhang. Wir formulieren hier nur ohne Beweis eine wesentliche Konsequenz der Überlagerungstheorie, und kommen ggf. später darauf zurück.

Definition 2.23 Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife $c : [0, 1] \rightarrow X$ in x_0 homotop zur konstanten Schleife $c(s) \equiv x_0$ ist. Diese Eigenschaft hängt nicht von der Wahl des Basispunkts x_0 ab.

Beispiel 2.24 Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, und allgemeiner jede sternförmige Menge (beachte, dass die Menge nicht notwendig sternförmig bzgl. des gegebenen Basispunkts x_0 sein muss). Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend genau für $n \geq 2$. //

Satz 2.25 Sei X eine zusammenhängende, m -dimensionale Mannigfaltigkeit, und $x_0 \in X$. Dann existiert eine einfach zusammenhängende, m -dimensionale Mannigfaltigkeit M und eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$, die frei und eigentlich diskontinuierlich operiert, so dass X diffeomorph zum Quotienten M/Γ ist. Die Projektion $\pi : M \rightarrow X \simeq M/\Gamma$ heißt universelle Überlagerung. Sie ist eindeutig in folgendem Sinn: ist $\pi' : M' \rightarrow X$ ebenfalls Überlagerung mit M' einfach zusammenhängend, so gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi : M' \rightarrow M$ mit $\pi' = \pi \circ \Phi$.

3 Tangential Vektoren und Differential

Die differenzierbarkeit einer Funktion $f : M \rightarrow N$ (M, N Mannigfaltigkeiten) ist über ihre koordinatendarstellung definiert, unabhängig von der wahl den koordinaten. Doch was ist die Ableitung von f ? Hierzu müssen wir als erstes erklären, was ein **Tangentialvektor** ist, und was der Tangentialraum von M in einem Punkt p sein soll. Zuerst beschäftigen wir uns mit $M = \mathbb{R}^n$

Definition 3.1 ${}_0T\mathbb{R}^n = \{(x, v) | x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n\}$ ist der Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$. ${}_0T_x\mathbb{R}^n \subset {}_0T\mathbb{R}^n = \{(x, v) | x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n\}$ ist der Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$ im Punkt x . und es wird so gezeichnet (Bild).

Bemerkung 3.2 Klar ist, dass ${}_0T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ als vektorräume (also isomorph als Vektorräume): ${}_0T_x\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$ Vektorraum mit $+, \cdot$ so definiert: $(x, v) + (x, w) = (x, v + w)$, $a(x, v) = (x, av)$. Die Isomorphism ist $(x, v) \rightarrow v$.

Eine andere mögliche Definition von $T_x\mathbb{R}^n$ wird mit Hilfe von Kurven die durch x gehen gemacht:

Definition 3.3 Seien $\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\gamma : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\delta, \alpha > 0$) C^1 Kurven. Falls $\sigma(0) = \gamma(0)$ und $\sigma'(0) = \gamma'(0)$, dann schreiben wir $\sigma \sim \gamma$ (man checkt leicht nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist). $[\gamma]$ ist die Äquivalenzklasse von $\gamma : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$. ${}_1T_x\mathbb{R}^n := \{[\gamma] : \gamma(0) = x\}$. ${}_1T_x\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot$ so definiert:

$$\begin{aligned} a[\gamma] &= [(a(\gamma - x) + x)], \\ [\alpha] + [\beta] &= [(\alpha + \beta - x)|_{(-r, r)}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei $r = \min\{\delta, \beta\} > 0$.

Bemerkung 3.4 Mit $a(\gamma - x) + x$ ist die Kurve $(a(\gamma - x) + x)(t) := (a(\gamma(t) - x) + x)$ gemeint, und mit $\alpha + \beta - x$ ist die Kurve $(\alpha + \beta - x)(t) = (\alpha(t) + \beta(t) - x)$ gemeint.

Bemerkung 3.5 ${}_1T_x\mathbb{R}^n \simeq {}_0T_x\mathbb{R}^n$ (Isomorph) durch $[\gamma] \rightarrow (x, \gamma'(0))$. Diese Abbildung ist linear, wohldefiniert und injektiv (trivial). Surjektiv ist sie auch: $\gamma(t) = x + tv$ wird auf (x, v) abgebildet.

Das nützliche an dieser Definition ist, dass es sich (im Gegensatz zur Defn. vorher) leicht zu Mannig. übertragen lässt.

Definition 3.6 Sei M eine diff. Mannig. Für $\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, $\gamma : (-\alpha, \alpha) \rightarrow M$ C^1 Kurven, schreiben wir $\sigma \sim \gamma$ falls $\sigma(0) = \gamma(0)$ und $(\phi \circ \sigma)'(0) = (\phi \circ \gamma)'(0)$ für eine beliebige Karte $\phi : U \rightarrow V$ mit $\gamma(0) = \sigma(0) \in U$. ${}_1T_pM := \{[\gamma] | \gamma(0) = p\}$. ${}_1T_pM$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot$ definiert durch:

$$\begin{aligned} a[\gamma] &= [\phi^{-1}(a(\phi \circ \gamma - \phi(p)) + \phi(p))|_{(-\epsilon, \epsilon)}] \\ [\sigma] + [\gamma] &= [\phi^{-1}(\phi \circ \sigma + \phi \circ \gamma - \phi(p))|_{(-\epsilon, \epsilon)}] \end{aligned}$$

(3.5)

wobei ϵ ist klein genug (so dass die Kurven wohldefiniert sind). ${}_1TM = \cup_{p \in M} {}_1T_pM$, $\pi : {}_1TM \rightarrow M$ ist $\pi(x) = p$ falls $x \in {}_1T_pM$.

Bemerkung 3.7 Um zu zeigen, dass die Definitionen wohl definiert sind, müssen wir folgendes zeigen

- Die Äquivalenzklassen in ${}_1T_pM$ hängen nicht von der wahl der Karte ab. (sonst muss es ${}_{1,\phi}T_pM$ heissen),
- $\sim$ ist ein Äquivalenzrelation,
- $+$ und $\cdot$ hängen nicht von der wahl der Karte ab (sonst muss es $\phi+$ und $\phi\cdot$ heissen),
- plus und $\cdot$ machen ${}_1T_pM$ zu einem Vektorraum.

Zur (i):

Sei $\phi : U \rightarrow V$, $\psi : W \rightarrow X$ karten mit $(\phi \circ \sigma)'(0) = (\phi \circ \gamma)'(0)$, $\sigma(0) = \gamma(0)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \sigma)'(0) &= (\psi \circ (\phi)^{-1} \circ \phi \circ \sigma)'(0) \\ \text{kettenregel} &= D(\psi \circ (\phi)^{-1})|_{(\phi \circ \sigma)(0)} (\phi \circ \sigma)'(0) \\ &= D(\psi \circ (\phi)^{-1})|_{(\phi \circ \sigma)(0)} (\phi \circ \gamma)'(0) \\ \text{kettenregel} &= (\psi \circ \gamma)'(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zur (ii):

klar

Zur (iii): z.b. $r[\sigma] = [\gamma_\phi]$ wobei, $\gamma_\phi = \phi^{-1}(r(\phi \circ \sigma - \phi(p)) + \phi(p))$, d.h. $\gamma_\phi(t) = \phi^{-1}(r(\phi \circ \sigma(t) - \phi(p)) + \phi(p))$.

$$\frac{\partial \psi \circ \gamma_\phi}{\partial t}(0) = D(\psi \circ \phi^{-1}) \cdot r \frac{\partial(\phi \circ \sigma)}{\partial t}(0) \quad (3.7)$$

$$= r D(\psi \circ \phi^{-1}) \frac{\partial(\phi \circ \sigma)}{\partial t}(0) \quad (3.8)$$

$$= r \frac{\partial \psi \circ \sigma}{\partial t}(0) \quad (3.9)$$

$$= \frac{\partial \gamma_\psi}{\partial t}(0) \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

$[\sigma] + [\gamma] = [\eta_\phi]$, wobei $\eta_\phi = \phi^{-1}(\phi \circ \sigma + \phi \circ \gamma - \phi(p))$. Es gilt dann:

$$\frac{\partial \psi \circ \eta_\phi}{\partial t}(0) = D(\psi \circ \phi^{-1}) (D\phi \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0) + D\phi \frac{\partial \gamma}{\partial t}(0)) \quad (3.12)$$

$$= D\psi \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0) + D\psi \frac{\partial \gamma}{\partial t}(0). \quad (3.13)$$

$$= \frac{\partial \psi \circ \eta_\psi}{\partial t}(0) \quad (3.14)$$

Zur (iv): Wir wissen, dass $\square$ ist koordinaten Unabhängig. D.h. o.B.d.A $\phi(p) = 0$ (sonst wähle $\tilde{\phi} = \phi - \phi(p)$). z.b.

$$r(l([\sigma])) = r([\phi^{-1}(l(\phi \circ \sigma))]) = r[\gamma]$$

wobei $\gamma = \phi^{-1}(l(\phi \circ \sigma))$, d.h. $\gamma(t) = \phi^{-1}(l(\phi \circ \sigma(t)))$. Dies bedeutet,

$$r(l([\sigma])) = r[\gamma] = [\phi^{-1}(r(\phi \circ \gamma))] = [\phi^{-1}(rl(\phi \circ \sigma(t)))].$$

Also,

$$r(l([\sigma])) = [\phi^{-1}(rl(\phi \circ \sigma(t)))] = rl[\sigma].$$

Z.b.

$$\begin{aligned} ([\sigma] + [\alpha]) + [\gamma] &= [\phi^{-1}(\phi \circ \sigma + \phi \circ \gamma - \phi(p))] + [\gamma] \\ &= [\phi^{-1}(\phi \circ \sigma + \phi \circ \gamma - \phi(p) + \phi \circ \gamma - \phi(p))] \\ &= [\sigma] + ([\alpha] + [\gamma]). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Definition 3.8 Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f \in C^1(M, N)$. Das **differential von f** ist die Abbildung, $Df : {}_1TM \rightarrow {}_1TN$, die so definiert wird: Für $[c] \in T_pM$ ist $Df([c]) := Df(p)([c])$ wobei, $Df(p) : {}_1T_pM \rightarrow {}_1T_{f(p)}N$ ist $Df(p)([c]) := [f \circ c]$. Man sagt: Df bildet ‘längs f ’ ab, das heißt: bezeichnet $\pi_M : {}_1TM \rightarrow M$ bzw. $\pi_N : TN \rightarrow N$ die kanonische Projektion, so gilt: $\pi_N \circ Df = f \circ \pi_M$. Andere übliche Bezeichnungen für das Differential in p sind $f_*(p)$ oder $T_p f$. Das Bild von $X \in {}_1T_pM$ unter der Abbildung $Df(p)$ schreiben wir manchmal mit, manchmal ohne klammern: $Df(p)(X)$ oder $Df(p)X$.

Satz 3.9 Seien M, N, P diff. Mannigfaltigkeiten. Ist $k \in \mathbb{N} \cup 1$ ($k \neq 0$) $f \in C^k(M, N)$ und $g \in C^k(N, P)$ so folgt $g \circ f \in C^k(M, P)$ und es gilt: $D(g \circ f) = Dg \circ Df$, und $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$, für alle $p \in M$.

Beweis: $g \circ f \in C^k(M, P)$ wurde bereits in ??? gezeigt. Jetzt, steze man der Definition von D ein:

$$D(g \circ f)([c]) = [g \circ f \circ c] = [g \circ (f \circ c)] = Dg[f \circ c] = Dg \circ Df[c].$$

□.

Bemerkung In die Definitionen 3.6 und 3.9 können wir Problemlos mit C^1 Kurven und Abbildungen (Statt C^∞ Kurven und Abbildungen arbeiten).

Definition 3.10 Seien $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte auf eine Mannigfaltigkeit M^n mit $p \in U$. Seien die **Koordinaten Kurven** ${}^\phi_i \gamma_p : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ durch ${}^\phi_i \gamma_p(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + te_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. $[{}^\phi_i \gamma_p]$ heissen **Koordinaten-Vektoren** (Bemerkung: ${}^\phi_i \gamma_p$ sind wohl definiert für ϵ klein genug).

Lemma 3.11 $[{}^\phi_1 \gamma_p], \dots, [{}^\phi_n \gamma_p]$ ist eine Basis für ${}_1T_pM$. Insbesondere gilt ${}_1T_pM \equiv \mathbb{R}^n$ (isomorph als Vektorräume)

Beweis: Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte mit $p \in U$ und $\phi(p) = 0$. Definiere $J = J_{1,0}^{\phi,p} : {}_1T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $J([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0)$ (J hängt von ϕ und p ab, aber ϕ, p sind fest). Klar ist: (siehe Defn. 3.6) J ist wohldefiniert. Es gilt auch, dass J linear ist.

$$J(a[\alpha] + [\beta]) = J(\phi^{-1}(a\phi \circ \alpha + \phi \circ \beta)) = (a\phi \circ \alpha + \phi \circ \beta)'(0) = aJ([\alpha]) + J([\beta]).$$

Injektiv ist sie auch: $J([\alpha]) = J([\beta])$ impliziert, dass $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$ und $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Das impliziert (Defn. 3.6) $[\alpha] = [\beta]$. Weiterhin gilt: $J([\phi^{-1}_i \gamma_p]) = (\phi \circ \phi^{-1}_i \gamma_p)'(0) = \frac{\partial(\phi(p) + te_i)}{\partial t} = e_i$. Also, J ist surjektiv, und $\{[\phi^{-1}_1 \gamma_p], \dots, [\phi^{-1}_n \gamma_p]\}$ ist eine Basis für ${}_1T_pM$. $\square$.

Anwesenheitsübung: Sei $J([\sigma]) = J([\gamma])$, mit $[\sigma], [\gamma] \in {}_1T_pM$. Dann gilt: $(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \sigma)'(0)$ und $\sigma(0) = \gamma(0)$, also $[\gamma] = [\sigma]$ per Definition. $\square$.

Diese Definition von T_pM ist einfach aber nicht so praktisch und umgänglich wie folgenden:

Definition 3.12 Sei M glatt, $p \in M$

$$C_M^\infty(p) = \{f|f : U_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } C^\infty \text{ und } p \in U_f, U_f \text{ offen in } M\} \quad (3.16)$$

$$\tilde{C}_M^\infty(p) = \{[f]_{\sim_p}\} \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

wobei $f \sim_p g$ falls $f : p \in U_f \rightarrow \mathbb{R}, g : p \in U_g \rightarrow \mathbb{R}$ und es existiert $U \subset U_f \cap U_g$ mit $g|_U = f|_U$.

$\tilde{C}_M^\infty(p)$ ist dann ein Algebra über $\mathbb{R}$ mit $\alpha[f] + \beta[g] := [(\alpha f + \beta g)|_{U_f \cap U_g}]$ und $[f][g] = [fg|_{U_f \cap U_g}]$.

Definition 3.13 $v : \tilde{C}_M^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Derivation in p falls

- linearität: $v(\alpha[f] + \beta[g]) = \alpha v([f]) + \beta v([g])$ für alle $[f], [g] \in \tilde{C}_M^\infty(p)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Leibnizregel $v([f] \cdot [g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g])$ für alle $[f], [g] \in \tilde{C}_M^\infty(p)$

Der Tangentialraum ${}_2T_pM$ von M in p ist die Menge von v , wobei v ein Derivation in p ist.

Bemerkung 3.14 Falls v ein Derivation in p ist, und $f : U_f \rightarrow \mathbb{R}, f \in C_M^\infty(p)$, dann mit $v(f)$ meinen wir $v([f])$. Auf diese Weise bekommt man eine Abbildung $v : C_M^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ (die wir auch mit v bezeichnen).

Lemma 3.15 Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ wobei U ein konvexes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ist, und $a \in U$. Dann existieren $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ so dass: $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}|_a$ $i = 1, \dots, n$ und

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - a^i)$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_0^1 \frac{\partial(f(a + t(x - a)))}{\partial t} dt \\
&= f(a) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Definiere $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt$ $\square$.

Definition 3.16 Sei ${}^p J_{1,2} : {}_1 T_p M \rightarrow {}_2 T_p M$

$$J([c])([f]) = \frac{d(f \circ c)}{dt} \Big|_{t=0}$$

für alle $[f] \in \tilde{C}_M^\infty(p)$.

J ist wohl definiert: Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte mit $p \in U$, und sei $[c] = [\alpha] \in {}_1 T_p M$ und $[f] = [g] \in \tilde{C}_M^\infty(p)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ c)}{dt} &= D(f \circ \phi^{-1})\left(\frac{d\phi \circ c}{dt}\right) \\
&= D(g \circ \phi^{-1})\left(\frac{d\phi \circ \alpha}{dt}\right) \\
&= \frac{d(g \circ \alpha)}{dt}
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

Lemma 3.17 ${}^p J_{1,2} : {}_1 T_p M \rightarrow {}_2 T_p M$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Linearität: Einfach. Injektivität: Sei ${}^p J_{1,2}([\alpha]) = {}^p J_{1,2}([\beta])$, $[\alpha], [\beta] \in {}_1 T_p M$, und sei $\psi : U \rightarrow \psi(U)$ eine Karte, mit $p \in U$. Es gilt: ${}^p J_{1,2}([\alpha])(\psi^i) = {}^p J_{1,2}([\beta])(\psi^i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. D.h.

$$\frac{d(\psi^i \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d\psi^i \circ \beta}{dt}(0)$$

welche

$$\frac{d(\psi \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d\psi \circ \beta}{dt}(0)$$

impliziert. D.h. $[\alpha] = [\beta]$.

Surjektivität. $\phi : U \rightarrow \psi(U)$ sei eine Karte, mit $p \in U$. Seien ${}^\phi E_i(p) = J_{1,2}([\phi_i \gamma_p])$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Zuerst Zeigen wir, dass $X(k_c) = 0$ für alle $X \in {}_2 T_p M$ für alle $c \in \mathbb{R}$ (hier ist $k_c : M \rightarrow \mathbb{R}$ $k_x(x) = c$ die Konstante Funktion). Es gilt $X(k_1) = X((k_1)^2) = 1 \cdot X(k_1) + 1 \cdot X(k_1) = 2X(k_1)$, und das impliziert, dass $X(k_1) = 0$ (hier wurde der Leibnizregel benutzt). Für $f \in C_M^\infty(p)$, definiere $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$. Das Lemma von vorher impliziert, dass $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - a^i)$ wobei $a = \phi(p)$. Für $X \in {}_2 T_p M$ definiere $\tilde{X} \in {}_2 T_a(\phi(U))$ durch $\tilde{X}([l]) = X([l \circ \phi])$ für alle $[l] \in \tilde{C}_{\phi(U)}^\infty(a)$. Ist ein wohldefinierte Derivation. Es gilt:

$$X(f) = \tilde{X}(\tilde{f})$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{X}(k_{\tilde{f}(a)}) + \tilde{X}\left(\sum_{i=1}^n g_i(x)(Id^i - a^i)\right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^n g_i(a)\tilde{X}(Id^i) + 0 \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} \Big|_a \\
&\quad (\alpha_i = \tilde{X}(Id^i)) \text{ hängt nicht von } f \text{ ab} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot {}^\phi E_i(p)\right)(f)
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

und das impliziert, dass ${}^p J_{1,2}$ ist surjektive, mit Basis ${}^\phi E_1(p), \dots, {}^\phi E_n(p)$

Definition 3.18 Sei $f : M \rightarrow N$ C^k . Die Abbildung $\tilde{D}f(p)(X) : {}_2T_p M \rightarrow {}_2T_{f(p)} N$ $\tilde{D}f(p)(X)([g]) = X([g \circ f])$ erfüllt

$$\tilde{D}(f)(p)({}^p J_{1,2}([c])) = {}^{f(p)} J_{1,2} D(f)(p)([c]).$$

Aus diesem Grund, nennen wir die Abbildung $\tilde{D}f$ auch Df .

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(f)(p)({}^p J_{1,2}([c]))([l]) &= {}^p J_{1,2}([c])[l \circ f] \\
&= \frac{\partial l \circ f \circ c}{\partial t}(0).
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Es gilt auch:

$${}^{f(p)} J_{1,2}(D(f)(p)([c]))([l]) = {}^{f(p)} J_{1,2}([f \circ c])([l]) = \frac{\partial l \circ f \circ c}{\partial t}(0). \tag{3.23}$$

. Also gleich.

Definition 3.19 Die ${}^\phi E_i(p)$ gerade definiert (${}^\phi E_i(p)([f]) = {}^p J_{1,2}([{}_i {}^\phi \gamma_p])$) werden mit ${}^\phi \frac{\partial}{\partial x^i}$ bezeichnet. Die heißen **die von ϕ erzeugten Koordinaten-Vektoren**. Manchmal wird ϕ weggelassen, aber damit wird eine Karte (implizit oder explizit) festgelegt. $\{ {}^\phi \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, {}^\phi \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \}$ ist eine Basis für ${}_2T_p M$ (siehe Beweis von Lemma 3.17). Die erfüllen ${}^\phi \frac{\partial}{\partial x^i}(p)([f]) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)}$ für alle $[f] \in \tilde{C}_M^\infty(p)$.

Die letzte Gleichheit wurde in dem Beweis von ?? benutzt. Wir zeigen es hier nochmal explizit. ($J = {}^p J_{1,2}$)

$$\begin{aligned}
J({}_i {}^\phi \gamma_p)([f]) &= (\text{defn. von } J) \frac{\partial}{\partial t} (f \circ {}_i {}^\phi \gamma_p) \Big|_{t=0} \\
&= (\text{defn. von } {}_i {}^\phi \gamma_p) \frac{\partial}{\partial t} (f \circ (\phi^{-1}(\phi(p) + t e_i))) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)}
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

wie erwünscht.

Lemma 3.20 Sei $\phi : U \rightarrow V, \psi : W \rightarrow Z$ zwei Karten mit $p \in U \cap W \subset M^n$, wobei M^n eine diff. Mannig. ist. Dann gilt:

$$\psi_* \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\phi^j \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \phi_* \frac{\partial}{\partial x^j}(p).$$

Definition 3.21 $X : M \rightarrow {}_2TM$ ist ein Vektorfeld falls $X(p) \in {}_2T_pM$ für alle $p \in M$ (d.h. $\pi : {}_2TM \rightarrow M$ erfüllt $\pi(X(p)) = p$). X ist ein C^k Vektorfeld falls für jede $x \in M$ es existiert eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ mit $x \in U$ und die Koordinatendarstellung

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \phi_* X^i(x) \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}(x),$$

erfüllt $\phi_* X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^k für alle $i = 1, \dots, n$. Ein lokales C^k Vektorfeld $X : V \rightarrow {}_2TM$ (V offen) erfüllt $\pi(X(p)) = p$ für alle $p \in V$ und für jede $x \in M$ es existiert eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ mit $x \in U$ und die Koordinatendarstellung

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \phi_* X^i(x) \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}(x),$$

erfüllt $\phi_* X^i : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^k für alle $i = 1, \dots, n$.

Bemerkung

Von dem Lemma vorher, folgende Aussagen sind äquivalent

- es existiert eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ mit $x \in U$ und die Koordinatendarstellung

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \phi_* X^i(x) \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}(x)$$

erfüllt $\phi_* X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^k für alle $i = 1, \dots, n$

- für alle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ mit $x \in U$, die Koordinatendarstellung

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \phi_* X^i(x) \phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}(x)$$

erfüllt $\phi_* X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^k für alle $i = 1, \dots, n$

Lemma 3.22 Der Vektorraum ${}_2T_pM$ ist isomorph zu $T_pM = \{v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ wobei } v \text{ linear ist, und die Leibniz Regel erfüllt: } v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\}$.

Definiere $J : {}_2T_pM \rightarrow T_pM$ durch $J(v)(f) = v([f])$. Die Inverse ist $K(w)([f]) = w(\eta f)$, wobei η eine Abschnide Funktion ist, mit $\eta f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Bemerkung Für ein $v \in {}_2T_pM$ ist immer auf diese Weise ein Vektor in T_pM zugeordnet, denn wir auch mit v bezeichnen $v(f) = v([f])$.

Wir benutzen fast ausschließlich jetzt nur diese Defn., obwohl alle drei Definitionen isomorph zueinander und zulässig sind.

Wir fassen zusammen, und machen einige Definitionen:

Definition 3.23 • Sei $c : (-a, a) \rightarrow M$ C^1 . Mit $c'(t_0)$ oder $\frac{dc}{dt}(t_0)$ meinen wir $c'(t_0) \in T_{p}M$,

$$c'(t_0)(f) := \frac{\partial(f \circ c)}{\partial t}(0).$$

- $\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \}$ ist eine Basis für $T_p M$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))$$

(hier ist $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine beliebige Karte mit $p \in U$).

- $TM = \cup_{p \in M} T_p M$
- Das **differential von einer C^1 Abbildung** $f : M \rightarrow N$ ist die Abbildung, $Df : TM \rightarrow TN$, die so definiert wird: Für $v \in T_p M$ ist $Df(v) := Df(p)(v) \in T_{f(p)}N$ wobei, $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ ist durch $Df(p)(v)(l) := v(l \circ f)$ für alle $l \in C^\infty(N)$ definiert.
- C^k vektorfelder werden genau wie in Definition 3.21 definiert (nach ersetzen von $_2 TM$ durch TM).
- Lemma 3.20 gilt auch auf $T_p M$.

Wir möchten TM als Mannigfaltigkeit schreiben. Um das zu machen, definieren wir zuerst die Karten (mit Hilfe diesen Karten, werden wir die Topologie definieren).

Definition 3.24 Für $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte auf M , definiere

$$\bar{\phi} : \bar{U} = \cup_{p \in U} T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

durch

$$\bar{\phi}\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) = (\phi(p), a^1, \dots, a^n).$$

Wir prüfen einige Eigenschaften von $\bar{\phi}$ nach.

- $\bar{\phi} : \bar{U} \rightarrow \bar{\phi}(\bar{U}) = \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ ist Bijektiv, und $\bar{\phi}(\bar{U})$ ist offen.
Surjektiv: Für $(r, a) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ sei y mit $\phi(y) = r$. Sei $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(y)$. Dann gilt $\bar{\phi}(X) = (r, a)$. Injektiv: Folgt, da $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ injektiv ist.

•

$$\cup_{\phi: U \rightarrow \phi(U) \in \mathcal{A}} \bar{U} = TM$$

(hier ist $\mathcal{A}$ der Atlas auf M).

•

$$\bar{\phi}(\bar{U} \cap \bar{V}) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

ist offen.

•

$$\bar{\phi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \psi(V \cap U) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(V \cap U) \times \mathbb{R}^n$$

ist C^∞ :

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \circ \bar{\psi}^{-1}(y, a) &= \bar{\phi}\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi^{-1}(y))\right) \\ &= \bar{\phi}\left(\sum_{i=1}^n a^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\phi^j \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}(y) \frac{\partial}{\partial x^j}(\psi^{-1}(y))\right) \\ &= (\phi \circ \psi^{-1}(y), \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial(\phi^1 \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}(y), \dots, \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial(\phi^n \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}(y)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

ist C^∞ .

Satz 3.25 Sei M^n eine n -dim. diff. Mannig. TM ist eine $2n$ dim. diff. Mannig. mit der natürlichen Topologie durch die Karten $\bar{\phi}$ und Satz 1.39 gegeben. $\pi : TM \rightarrow M$ ist dann C^∞ da $\pi(\bar{U}) = U$ und $\phi \circ \pi \circ \bar{\phi}^{-1}(x, a) = x$ ist dann C^∞ .

Definition 3.26 Die standard Basisvektoren in $T_y U$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ sind $e_1(y), \dots, e_n(y)$ mit $e_i(y)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(y)$ für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Sei $a, x \in \mathbb{R}^n$. Mit $a|_x \in T_x U$ oder $a \in T_x U$ (wenn es klar ist was x ist) meinen wir der Vektor $a|_x = \sum_{i=1}^n a^i e_i(x)$.

Lemma 3.27 Für eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ auf eine n -dim. diff. Mannig. M^n gilt:

$$D(\phi^{-1})(y)(e_i(y)) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(y)),$$

wobei hier $e_i(x)$ die Standard Basisvektoren in $T_x(U)$ sind. Insbesondere, gilt:

$$D(\phi^{-1})(y)(a|y) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(y)),$$

$$D\phi(p)\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right) = a|_{\phi(p)}$$

$$\bar{\phi}(v) = (\phi(p), (T \circ D\phi(p))(v))$$

für $v \in T_p M \subset \bar{U}$, wobei $T : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $T(a|_x) = a$ (ist C^∞) und

$$\bar{\phi}^{-1}(y, a) = D\phi^{-1}(y)(a|y) = D\phi^{-1}(y) \circ S(y, a),$$

wobei $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ ist $S(y, a) = a_y$.

Bemerkung: dass T und S C^∞ sind, folgt direkt von der Defn. von $T\mathbb{R}^n$ und C^k Vektorfelder. Beweis: $D(\phi^{-1})(y)(e_i(y))(h) = e_i(y)(h \circ \phi^{-1}) = (\text{defn. von } e_i(y)) \frac{\partial h \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}(y) = (\text{defn. von } \frac{\partial}{\partial x^i}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(y))(h)$ für alle $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Also, $D(\phi^{-1})(y)(e_i(y)) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(y))$ wie erwünscht. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} a_{\phi(p)} &= D\phi(p) \circ D\phi^{-1}(\phi(p))(a|_{\phi(p)}) \\ &= D\phi(p) \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

wie erwünscht. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^{-1}(y, a) &= \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(y)) \\ &= D\phi^{-1}(y)(a|_y). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Weiterhin gilt für $v \in T_p M$,

$$\bar{\phi}(v) = \bar{\phi} \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right) = (\phi(p), \phi v) = (\phi(p), T \circ D\phi(p)(v)),$$

wobei $\phi v \in \mathbb{R}^n$ ist $\phi v = (\phi v^1, \dots, \phi v^n)$.

Korollar 3.28 Seien M^m, N^n diff. Mannig. Ist $f \in C^k(M, N)$ mit $k \geq 1$, so ist $Df \in C^{k-1}(TM, TN)$.

Beweis Seien $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ bzw. $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $f(U) \subset V$. $Df(\bar{U} = \pi_M^{-1}(U)) \subset (\bar{V} = \pi_N^{-1}(V))$ (Defn. von Df und Tatsache, dass $\phi(U) \subset V$) und für $x \in \phi(U)$ und $a \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\bar{\psi} \circ Df \circ \bar{\phi}^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$ (nicht unbedingt surjektiv) ist

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ Df \circ \bar{\phi}^{-1}(y, a) &= \bar{\psi} \circ Df(\phi^{-1}(y))D\phi^{-1}(a|_y) \\ \text{(hier wurde Lemma 3.27 benutzt)} &= \bar{\psi}(D(f \circ \phi^{-1})(y)(a|_y)) \\ \text{(benutze hier Kettenregel für } D) &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(y), T \circ D\psi(\phi^{-1}(y))((Df \circ \phi^{-1})(y)(a|_y))) \\ \text{(benutze die Defn. von } \bar{\psi}) &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(y), T \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(y)(a_y)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(y), T \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(y) \circ S(y, a)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(y), \hat{D}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(y)(a)) \end{aligned} \quad (3.28)$$

ist C^{k-1} da es C^{k-1} in allen Komponenten ist, wobei hier $\hat{D}$ die Standard Ableitung von $\mathbb{R}^m$ zu $\mathbb{R}^n$ ist $\hat{D}f(x)(a) = (\sum_{i=1}^m a^i (\frac{\partial f^1}{\partial x^i})(x), \dots, \sum_{i=1}^m a^i (\frac{\partial f^n}{\partial x^i})(x))$.

4 Untermannigfaltigkeiten, Immersionen und Einbettungen

Definition 4.1 Für eine C^k Abbildung $h : M \rightarrow N$ ($k \geq 1$) sagen wir:

- $p \in M$ ist regulärer (bzw. singulärer) Punkt von h iff $Dh(p)$ ist (bez. ist nicht) surjektiv
- $q \in N$ ist singulärer Wert von h iff es existiert ein $p \in h^{-1}(\{q\})$, so dass p ist ein singulärer Punkt von h ist.
- $q \in N$ ist ein regulärer Wert von h iff q ist nicht ein singulärer Wert von h
- h ist eine Immersion $\iff Dh(p)$ injektiv für alle $p \in M$ (impliziert, dass $\dim(M) \leq \dim(N)$).
- h ist ein Submersion $\iff Dh(p)$ surjektiv für alle $p \in M$ (impliziert, dass $\dim(M) \geq \dim(N)$).
- h ist eine Einbettung $\iff h$ ist eine Immersion und $h : M \rightarrow h(M)$ ein Homeomorphismus ist (hier, $h(M) \subset N$ ist mit der Induzierten Topologie versehen).

Bemerkung 4.2 Wir benutzen öfters folgendes: Sei $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, und $x, a \in \mathbb{R}^m$ dann ist

$$\begin{aligned} DF(x)(a_x) &= \sum_{i=1}^m a^i DF(x)(e_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a^i \frac{\partial F^k}{\partial x^i}(x) e_k(F(x)) \end{aligned} \quad (4.29)$$

da,

$$DF(e_i(x))(Id^k) = e_i(x)(Id^k \circ F) = e_i(x)(F^k) = \frac{\partial F^k}{\partial x^i}(x).$$

Beispiel 4.3 Für $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $F = \text{graph}(f) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ durch $F(x) = (x, f(x))$ definiert. Wenn $f \in C^1$ ist, dann ist F eine Einbettung.

$$\begin{aligned} DF(x)(e_i(x)) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial F^k}{\partial x^i}(x) e_k(F(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{ki} e_k(F(x)) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) e_{n+1}(x) \\ &= e_i(F(x)) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) e_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (4.30)$$

also injektiv. F selber ist injektiv: $(x, f(x)) = (y, f(y))$ impliziert, dass $x = y$. F ist stetig. Trivial. F^{-1} ist stetig?: $F(x_i) \rightarrow F(x)$ impliziert $(x_i, f(x_i)) \rightarrow (x, f(x))$ impliziert $x_i \rightarrow x$. Also F^{-1} ist stetig. Also, F ist eine Einbettung.

Beispiel 4.4 $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = xA + b$, $A = (A)_{ij}$ $i \in 1, \dots, m$ $j \in 1, \dots, n$.

$$F(x^1, \dots, x^m) = (x^i A_{i1}, \dots, x^i A_{in}) + (b_1, \dots, b_n).$$

$$DF(x)(a|_x) = (a^i A_{i1}, \dots, a^i A_{in})|_{F(x)}.$$

Also, $DF(x)$ injektiv genau dann, wenn A ist Injektiv genau dann, wenn $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv. Also, $DF(x)$ injektiv impliziert $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv und $DF(y)$ ist injektiv für alle $y \in \mathbb{R}^m$. In dem Fall gilt:

- F ist stetig,
- F ist injektiv,
- $F^{-1} : F(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig: $F(x_i) \rightarrow F(x)$ impliziert $x_i A \rightarrow x A$ impliziert, $(x_i - x)A \rightarrow 0$ impliziert $x_i - x \rightarrow 0$, da A injektiv ist.

Also, F ist in dem Fall eine Einbettung.

Beispiel 4.5 Achterknoten.

$F : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein Achterknoten mit $F(\pi) = (0, 0)$, F injektiv, Immersion aber keine Einbettung, da F^{-1} nicht stetig ist. $c_i := (2 \cos(t_i - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t_i - \frac{\pi}{2}))$ $t_i > 0$ $t_i \rightarrow 0$ sind Punkte in $F((0, 2\pi))$. Es gilt $c_i \rightarrow (0, 0)$. Aber $F^{-1}(c_i) = t_i \rightarrow 0 \neq F^{-1}(0, 0) = \pi$. Also, F^{-1} ist nicht stetig.

Bemerkung: Identifikation von $\mathbb{R}^n$ mit $T_x \mathbb{R}^n$ Sei $a, x \in \mathbb{R}^m$, $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U offen. Letztesmal (Bemerkung 4.2 haben wir gesehen, dass $DF(x)(a|_x) = (\hat{D}F(x)(a))|_{F(x)}$ wobei, $\hat{D}F(x)(a)$ die Ableitung von F in x angewandt auf a ist:

$$\hat{D}F(x)(a) = (\sum_{i=1}^m \frac{\partial F^1}{\partial x_i} a^i, \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial F^n}{\partial x_i} a^i).$$

Man lässt das dach weg, obwohl strenggenommen, die andere Abbildungen sind. $DF(x)(a|_x) = (DF(x)(a))|_{F(x)}$.

Definition 4.6 Sei $F : M^m \rightarrow N^n$ C^1 . Der Rang von F in p ist der Rang der Matrix

$$(\frac{\partial \psi^j \circ F \circ \phi^{-1}}{\partial x^i})(\phi(p)), j \in \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, m\}$$

für beliebige Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ mit $F(U) \subset V$.

Lemma 4.7 1. Der Rang von F in p ist wohl definiert (hängt nicht von den wahl von Karten ab).

2. Sei U offen. Falls F Rang k in y für alle $y \in U$, und F C^l ist ($l \geq 1$) dann gibt es C^l Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$, mit $F(U) \subset V$, so dass

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

für alle $x \in \phi(U)$.

3. Man kann die Karten so wählen, so dass $\phi(U) = C_r^m(0)$ und $\psi(V) = C_s^n(0)$, wobei $C_r^l(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x^i| < r, \text{ für alle } i = 1, \dots, l\}$.

Beweis Idee:

Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ mit $F(U) \subset V$. Sei $\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. Der Rang der Jacobiimatrix von $\hat{F}$ ist k . Das Problem ist jetzt ein Problem in $\mathbb{R}^n$. Man beweist der existenz von Diffeos (mit Hilfe der Umkehr Satz von AnaII) $f : \tilde{U} \subset \phi(U) \rightarrow \tilde{\tilde{U}} \subset \mathbb{R}^m$ und $g : \tilde{V} \subset \psi(V) \rightarrow \tilde{\tilde{V}} \subset \mathbb{R}^n$, so dass $g \circ \hat{F} \circ f^{-1}$ die gewünschte Form hat. Dann benutzt man, dass $g \circ \psi$ und $h \circ \phi$ auch Koordinaten sind. Beweis von 4.7: O.b.d.A ist $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ und $F(0) = 0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ (sonst betrachte $\tilde{F}(\cdot) = F(\cdot + a) - F(a)$). und, so dass $\det(\partial_i F^j x^i)_{i,j} (p), i, j \in 1, \dots, k \neq 0$ für alle $p \in U$ (nach neu ordnung von $x^1, \dots, x^m$ und $F^1(x), \dots, F^n(x)$). Wir schreiben $F(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ für $(x, y) \in U, x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{m-k}$ wobei $A : U \rightarrow \mathbb{R}^k, A(x, y) = (F^1(x, y), \dots, F^k(x, y))$ ist, und $B : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, B(x, y) = (F^{k+1}(x, y), \dots, F^n(x, y))$ ist.

Definiere $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $\phi(x, y) = (A(x, y), y)$. Dann ist: $D\phi(0, 0) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A^i}{\partial x^j}(0, 0) & \frac{\partial A^i}{\partial y^j}(0, 0) \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

wobei hier i ist die reihe, j die spalte. Also $\frac{\partial A^i}{\partial x^j}(0, 0)$ ist eine $k(\text{Reihen}) \times k(\text{Spalten})$ Matrix $\frac{\partial A^i}{\partial y^j}(0, 0)$ ist eine $k(\text{Reihen}) \times m - k(\text{Spalten})$ Matrix ($i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, m - k\}$) Also insgesamt: $m \times m$ Matrix. Aber, $(\frac{\partial A^i}{\partial x^j}(0, 0))_{i,j} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)$ $i, j \in 1, \dots, k$. Also $\det D\phi \neq 0$. Es existiert eine off. Umgebung $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\phi|_{U_0} : U_0 \rightarrow \phi(U_0)$ bijektiv ist, mit einer C^l Inverse $\phi^{-1} : \phi(U_0) \rightarrow U_0$: Satz über Inverse Funktion, AnaII. Durch verkleinern, können wir annehmen, dass $\phi(U_0) = C_\epsilon^m(0)$ für ein $\epsilon > 0$ (da $\phi(0, 0) = 0 \in \phi(U_0)$).

Behauptung: $F \circ \phi^{-1}(x, y) = (x, R(x, y))$ für eine C^l Funktion $R : C_\epsilon^m(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

$$(x, y) = \phi(\phi^{-1}(x, y)) = (A(\phi^{-1}(x, y)), \phi^{-1}(x, y)),$$

impliziert, dass (Defn. of F zuerst)

$$\begin{aligned} F \circ \phi^{-1}(x, y) &= (A \circ \phi^{-1}(x, y), B \circ \phi^{-1}(x, y)) \\ &= (x, R(x, y)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

wobei $R = B \circ \phi^{-1} : C_\epsilon^m(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. Jetzt rechnet man nach, dass $D(F \circ \phi^{-1})(x, y) =$

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial R^i}{\partial x^j}(x, y), & \frac{\partial R^i}{\partial y^j}(x, y) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

wobei wieder i ist reihe, j Spalte. Also: $n - k \times k$ und $n - k \times m - k$ Matrizen unten Insgesamt: $n(\text{Reihen}) \times m(\text{Spalten})$

Aber ϕ^{-1} ist ein Diffeo, also $DF \circ \phi^{-1} = DF \cdot D\phi^{-1}$ hat die gleiche Rang wie DF , das heisst Rang k (da $D\phi^{-1}$ bijektiv ist). Aber die erste k Spalten sind LU, also, $\frac{\partial R^i}{\partial y^j}(x, y) = 0$ in $C_\epsilon^m(0)$ (sonst ist Rang nicht k). D.h. $R(x, y) = R(x, 0)$ für alle $(x, y) \in C_\epsilon^m(0)$. Definiere $S : C_\epsilon^k(0) = \pi_{\mathbb{R}^k}(C_\epsilon^m(0)) \rightarrow V$ durch $S(x) = R(x, 0)$: wohldefiniert, da $(x, 0) \in C_\epsilon^m(0)$ falls $x \in C_\epsilon^k(0)$. Dann gilt $R(x, y) = R(x, 0) = S(x)$ für alle $(x, y) \in C_\epsilon^m(0)$. D.h. $\tilde{F} = F \circ \phi^{-1} : C_\epsilon^m(0) \rightarrow V$, erfüllt $\tilde{F}(x, y) = (x, S(x))$. Von Aufgabe 2. neues Blatt ("Abflachung von Graphen"): Es existieren offene Mengen $0 \in V_0 \subset V$ und eine C^l bijektive Abbildung $\psi : V_0 \rightarrow \psi(V_0)$ mit $\psi(x, S(x)) = (x, 0)$ für alle $(x, S(x)) \in V_0$. Durch verkleinern, können wir annehmen, dass $\psi(V_0) = C_\delta^n(0)$. Durch nochmal verkleinern von $C_\epsilon^k(0)$ zu $C_\epsilon^k(0)$, bekommen wir $\tilde{F}(C_\epsilon^k(0)) \subset \psi^{-1}(C_\delta^n(0))$ (Stetigkeit von $\tilde{F}$). Dann gilt: $\psi \circ \tilde{F} : C_\epsilon^m(0) \rightarrow C_\delta^n(0)$ ist wohl definiert, und erfüllt $\psi \circ \tilde{F}(x, y) = (x, 0)$ für alle $(x, y) \in C_\epsilon^m(0)$ wie erwünscht. $\square$

Lemma 4.8 Sei $F : M^m \rightarrow N^n$ eine Immersion. Dann existiert $U \subset M$ offen so dass, $F|_U : U \rightarrow N^n$ eine Einbettung ist.

Beweis:

Wir zeigen zuerst: F hat Rang m in p für alle $p \in M$, da F eine Immersion ist. Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ mit $F(U) \subset V$. Sei $a \in \mathbb{R}^m, a \neq 0$, und $x = \phi(p) \in \phi(U)$. Dann ist $a|_x \in T_x\phi(U), a|_x \neq 0$.

Sei $v \in T_pM, v = D\phi^{-1}(x)(a|_x) \neq 0$. Dann gilt: $0 \neq DF(p)(v) = DF(p)(D\phi^{-1}(x) \circ D\phi(p)(v))$ (hier ist $x = \phi(p)$) impliziert $DF(p)(v) = DF(p)D\phi^{-1}(x)(a|_x) \neq 0$ impliziert $D(F \circ \phi^{-1})(a|_x) \neq 0$ impliziert $D\psi(F(p))D(F \circ \phi^{-1})(a|_x) \neq 0$ impliziert $D(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(a|_x) \neq 0$. Aber, $f = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, und so $Df(x)(a|_x) = (\hat{D}f(x)(a))_{f(x)}$ wobei $\hat{D}f$ das Jacobimatrix ist. (ÜA). Aus diesem Grund werden wir $\hat{D}$ auch mit D bezeichnen. Es soll von Zusammenhang klar sein, welche gemeint ist. Also, $Df(x)(a) \neq 0$, für alle $a \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ welche impliziert, dass $Df(x)$ Rang m hat, welche impliziert, dass F Rang m hat (defn. von "Rang von F in p ") in p für alle $p \in M$. Von dem Lemma 4.7, es existieren $\phi : U \rightarrow C_r^m(0), \psi : V \rightarrow C_s^n(0)$ mit $F(U) \subset V$, und $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$. Insbesondere, ist diese Abbildung bijektiv auf seinem Bild. Das impliziert, dass $F : U \rightarrow F(U)$ ist bijektiv. $F \in C^k(U, V)$ klar (von der koordinaten Darstellung), insbesondere, ist $F : U \rightarrow F(U)$ stetig $F^{-1}(V \cap F(U)) = F^{-1}(V)$ ist offen für V offen. Ist F^{-1} stetig? Wir müssen zeigen, dass $F(W)$ ist offen, für offene $W \subset U$. $W \subset U$ offen in U impliziert, dass W ist offen in M . Sei $\tilde{W} = \phi(W)$ (ist offen in $C_r^m(0)$). Dann gilt:

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(\tilde{W}) = \tilde{W} \times \{\vec{0}\}$$

wobei $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Aber dann gilt:

$$\begin{aligned} \psi \circ F \circ \phi^{-1}(\tilde{W}) &= \tilde{W} \times \{\vec{0}\} \\ &= \tilde{W} \times C_s^{n-m}(0) \cap \psi \circ F \circ \phi^{-1}(C_r^m(0)) \\ &= \tilde{W} \times C_s^{n-m}(0) \cap \psi \circ F(U). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aber dann ist, $\psi \circ F(W) = \psi \circ F \circ \phi^{-1}(\tilde{W}) = \tilde{X} \cap (\psi \circ F)(U)$, wobei $\tilde{X} = \tilde{W} \times C_s^{n-m}(0)$ offen in $C_s^n(0)$ ist. Insbesondere: $F(W) = \psi^{-1}(\tilde{X}) \cap F(U)$, wobei $\tilde{X}$ offen in N ist. Also, $F(W)$ ist offen in $F(U)$ bezüglich der induzierten Topologie von N . $\square$

Definition 4.9 Sei M^m eine diff. Mannig. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **n -dim. differenzierbare (C^∞)-Untermannigfaltigkeit von M** falls für alle $p \in N$ eine C^∞ Karte $\phi : p \in U \rightarrow \phi(U) = V$ existiert mit $\phi(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{\vec{0}\}) \subset \mathbb{R}^m$. Sei $\tilde{\phi} : (N \cap U) \rightarrow V, \tilde{\phi}(p) = \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(p))$, wobei $\pi_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Projektion in den ersten n -variablen ist. Die Menge solche $\tilde{\phi} : N \cap U \rightarrow V$ bilden ein C^∞ n -dimensionaler Atlas für N (mit der von M induzierten Topologie).

Die letzte Aussage sieht man wie folgt. $\tilde{\phi}$ ist bijektiv: Sei $p, q \in N \cap U$ und $\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(q)$. Dann gilt $\pi_{\mathbb{R}^n}(\phi^1(p), \dots, \phi^n(p), 0, \dots, 0) = \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi^1(q), \dots, \phi^n(q), 0, \dots, 0)$ impliziert $\phi(p) = \phi(q)$ impliziert $p = q$ (da ϕ Koordinaten sind).

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{-1}(W) &= \{x \in N \cap U \mid \tilde{\phi}(x) (= \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(x))) \in W\} \\ &= \{x \in N \cap U \mid (\phi^1(x), \dots, \phi^n(x)) \in W\} \\ &= \{x \in N \cap U \mid \phi(x) \in W \times \mathbb{R}^n\} \\ &= \phi^{-1}(W \times \mathbb{R}^{n-m} \cap \phi(U)) \cap N \cap U \end{aligned} \quad (4.35)$$

da, $(\phi^{n+1}(x), \dots, \phi^m(x)) = 0$ für $x \in N \cap U$. Ist offen in $N \cap U$ wie erwünscht. Sei B offen in U .

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(B \cap N) &= \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(B) \cap \phi(U \cap N)) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(B)) \cap \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(U \cap N)) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(B)) \cap \pi_{\mathbb{R}^n}(V \cap (\mathbb{R}^n \times \{\vec{0}\})) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(B)) \cap \pi_{\mathbb{R}^n}(V \cap \mathbb{R}^m) \end{aligned} \quad (4.36)$$

ist offen, da $\pi_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ offen ist. Schliesslich,

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1} = \pi_{\mathbb{R}^n} \circ \psi \circ \phi^{-1} \circ G$$

, wobei $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $G(x) = (x, \vec{0})$ ist. Dies ist die Verkettung von C^∞ Funktionen, also selber C^∞ ist.

Bemerkung Die Defn. kann man genau sogut für C^l statt C^∞ machen: Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **n -dim. differenzierbare C^l -Untermannigfaltigkeit von N** $l \geq 0$ falls für alle $p \in N$ eine C^l Karte $\phi : p \in U \rightarrow \phi(U) = V$ existiert mit $\phi(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{\vec{0}\}) \subset \mathbb{R}^m$. wobei V offen in $\mathbb{R}^m$ ist. Sei $\tilde{\phi} : (N \cap U) \rightarrow V, \tilde{\phi}(p) = \pi_{\mathbb{R}^n}(\phi(p))$, wobei $\pi_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Projektion in den ersten n -variablen ist. Die Menge solche $\tilde{\phi} : N \cap U \rightarrow V$ bilden ein C^l n -dimensionaler Atlas für N (mit der von M induzierten Topologie).

Satz 4.10 Sei $F : M^m \rightarrow N^n$ eine C^l $l \geq 1$ Einbettung, Dann ist $F(M^m)$ eine m -dimensionale C^l Untermannigfaltigkeit von N^n .

Beweis: Beweist man mit Hilfen den Spezialkoordinaten 4.7.

Satz 4.11 Sei $F : M^m \rightarrow N^n$ eine injektive Immersion, M kompakt. Dann gilt: F ist eine Einbettung.

Bevor wir das beweisen, brauchen wir folgende Hilfslemma:

Lemma 4.12 *Sei X, Y topologische Räume.*

- $G \subset X$ abgeschlossen, X Kompakt. Dann ist G kompakt.
- $F : X \rightarrow Y$ stetig ist, und $K \subset X$ Kompakt, dann ist $F(K)$ Kompakt in $F(X)$ (hier ist $F(X)$ mit der induzierten Topologie versehen).
- $K \subset X$ Kompakt, X Hausdorff, dann ist K abgeschlossen.

Beweis: ÜA 1. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine Überdeckung von G . Dann ist $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup G^c$ eine Überdeckung von K , welche impliziert, dass es existiert eine endliche Überdeckung $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}, G^c\}$ oder $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$ von K impliziert, dass $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$ ist eine Überdeckung von G .

2. Sei $\{U_\alpha \cap F(K)\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von $F(K)$ (U_α offen in X). Dann ist $F^{-1}(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ eine Überdeckung von K . K Kompakt, impl., dass $F^{-1}(U_{\alpha_1}), \dots, F^{-1}(U_{\alpha_N})$ eine Überdeckung von K ist. Dann ist $F(F^{-1}(U_{\alpha_1}), \dots, F(F^{-1}(U_{\alpha_N}))) = U_{\alpha_1} \cap F(K), \dots, U_{\alpha_N} \cap F(K)$ eine Überdeckung von $F(K)$. Impliziert

3.

K kompakt, sei $x \in X \setminus K$ fixiert. Für $y \in K$ existiert es U_y, V_y offene Umg. von x bzw. y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$, da X Hausdorff ist (x fixiert). Dann ist $\{U_y\}_{y \in K}$ eine Überdeckung von K . Impliziert, $U_{y_1}, \dots, U_{y_N}$ eine Überdeckung von K . Sei $U = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_N}$ (offen). Definier $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_N}$ (offen). $V \cap U = \emptyset$. Impliziert, dass $V \cap K = \emptyset$. $x \in V \subset X \setminus K$ also, $X \setminus K$ offen, d.h. K abgeschlossen. $\square$

Jetzt zum Beweis von 4.11. Sei $G \subset M$ abgeschlossen. Das Lemma oben impliziert, dass G Kompakt ist. Also, $F(G)$ ist Kompakt in $F(M)$. N Hausdorff impliziert $F(M)$ Hausdorff ($x, y \in F(M)$, denn wähle U_x, U_y offene Umgebung in N mit $U_x \cap U_y = \emptyset$, dann ist $(U_x \cap F(M)) \cap (U_y \cap F(M)) = \emptyset$). Also, $F(G)$ abgeschlossen. D.h. $F^{-1} : F(M) \rightarrow M$ ist stetig.

Satz 4.13 *Sei $F : M^m \rightarrow N^n$ eine C^∞ Abbildung mit Rang k für alle $p \in M^m$. Für alle $q \in F(M^m) \subset N^n$ gilt: $F^{-1}(\{q\})$ ist eine abgeschlossene, $m - k$ dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von M^m .*

Sei $A = F^{-1}(\{q\})$. A ist abgeschlossen da F stetig, und $\{q\}$ abgeschlossen. Sei $p \in A$. Rang Theorem impliziert, dass es existieren Karten $\phi : U \rightarrow C_r^m(0)$, $\psi : V \rightarrow C_s^n(0)$ mit $F(U) \subset V$, und $\phi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$, und $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \phi : C_r^m(0) \rightarrow C_s^n(0)$ erfüllt $\tilde{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. Das impliziert, dass

$$\begin{aligned}
 A \cap U &= F^{-1}(q) \cap U \\
 &= \phi^{-1}(\phi \circ F^{-1}(q)) \\
 &= \phi^{-1}(\phi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}(0)) \\
 &= \phi^{-1}((\tilde{F})^{-1}(0)) \\
 &= \phi^{-1}\{x \in C_r^m(0) | x^1, \dots, x^k = 0\}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Definiere $\hat{\phi} : U \rightarrow C_r^m(0)$ durch $\hat{\phi}(z) = (\phi^{k+1}(z), \dots, \phi^m(z), \phi^1(z), \dots, \phi^k(z))$. Dann ist $\hat{\phi}$ auch eine Karte (stetige Inverse ist $\hat{\phi}^{-1}(x^1, \dots, x^m) = \phi^{-1}(x^{m-k+1}(z), x^m, x^1, \dots, x^{m-k})$ ist stetig). Dann ist $\hat{\phi}(A \cap U) = C_r^m(0) \cap \mathbb{R}^{m-k} \times 0$. Also, A ist eine $m - k$ dimensionale Untermannigfaltigkeit.

5 Integral Kurven und Flüsse

Notation: zuerst führen wir Notation ein:

Definition 5.1 Sei M eine Mannigfaltigkeit. $X : M \rightarrow TM \in C^k(\mathcal{X}(M))$ genau dann, wenn X ist eine C^k Vektorfeld auf M .

Definition 5.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (evtl. uneigentliches) Intervall ($I = (a, b) = [a, b) = (a, b] = [a, b]$ alles erlaubt). Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes $X : M \rightarrow TM$, falls $c \in C^1(I, M)$ und falls gilt:

$$\frac{dc}{dt} = X \circ c \quad (\text{d.h. } \frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)) \text{ für alle } t \in I). \quad (5.38)$$

c heißt maximale Integralkurve, wenn es keine Integralkurve $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow M$ gibt mit $I \subsetneq \tilde{I}$ und $\tilde{c}|_I = c$. Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt Lösung des Anfangswertproblems für X zum Anfangswert $p \in M$, falls

$$\frac{dc}{dt} = X \circ c, \quad c(0) = p.$$

Beispiel 5.3 Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $X(x) = e_1(x)$ (Bild.) Fall 1. Sei $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_1 \neq 0$. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine Integral Kurve (I beliebig) durch (x_1, y_1) und $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine maximale Integralkurve. fall 2. Sei $(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 < 0$. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine Integral Kurve für $I \subset (-\infty, -x_1)$ beliebig durch (x_1, y_1) und $c : (-\infty, -x_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine maximale Integralkurve.

Fall 3. Sei $(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 > 0$. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine Integral Kurve für $I \subset (-x_1, \infty)$ beliebig durch (x_1, y_1) und $c : (-x_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x_1, y_1) + t(1, 0)$ ist eine maximale Integralkurve.

Bemerkung 5.4 Wenn $I = [a, b)$ z.B. und $a > -\infty$, dann $c \in C^1(I, M)$ bedeutet $c \in C^1((a, b), M) \cap C^0([a, b), M)$ und $\frac{dc}{dt} \in C^0((a, b), M)$ und es existiert ein $v \in T_a M$ mit $\frac{dc}{dt} \rightarrow v$ als $t \rightarrow a$. $c \in C^1([a, b), M)$ $\frac{dc}{dt}(a) = K$ heisst, $v = K$ (wobei v gerade definiert wurde). $c \in C^1([a, b), M)$ X ein V.Feld auf M , $\frac{dc}{dt} = X \circ c$ heisst $\frac{dc}{dt}(t) = X \circ c(t)$ auf (a, b) und $v = X(c(a))$ (wobei v ist wie oben definiert).

Wir untersuchen die Situation in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.5 Sei $c : I \rightarrow U$ $U \subset \mathbb{R}^n$, und $X : U \rightarrow TU$ ein V.Feld auf U mit $X(x) = (\psi^1(x), \dots, \psi^n(x))|_x (= \sum_{i=1}^n \psi^i(x) e_i(x))$. Dann ist

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t))$$

genau dann, wenn

$$c'(t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t)) = (\psi^1(c(t)), \dots, \psi^n(c(t))) = \psi(c(t)).$$

(die erste Gleichung ist eine Gleichheit zwischen Derivationen, die nächste zwischen Funktionen).

(1) impliziert: $(\frac{dc}{dt}(t))(Id^i) = X(c(t))(Id^i)$ (wobei $Id^i : U \rightarrow U, Id^i(x) = x^i$) impliziert, $(Id^i \circ c)'(t) = (\sum_{j=1}^n \psi^j(c(t))e_i(c(t)))(Id^i)$ impliziert $(c^i)'(t) = \psi^i(c(t))$, wie erwünscht (andere Richtung so ähnlich).

Definition 5.6 Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M, N)$. Das Vektorfeld $Y : N \rightarrow TN$ heißt f -verwandt zu dem Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$, wenn gilt:

$$Y \circ f = Df \cdot X \quad (\text{d.h. } Y(f(p)) = Df(p)X(p) \text{ für alle } p \in M).$$

Lemma 5.7 Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f \in C^1(M, N)$. Das Vektorfeld $Y : N \rightarrow TN$ sei f -verwandt zu $X : M \rightarrow TM$. Ist dann $c : I \rightarrow M$ Integralkurve von X , so ist $f \circ c : I \rightarrow N$ Integralkurve von Y .

BEWEIS: $(f \circ c)'(t) = Df(c(t)) \cdot c'(t) = Df(c(t)) \cdot (X(c(t))) = Y(f \circ c(t))$. $\square$

Bemerkung 5.8 Zu gegebenem X und f muss kein f -verwandtes Feld Y existieren, zum Beispiel kann es Punkte $p_{1,2} \in M$ geben mit $f(p_1) = f(p_2)$, aber $Df(p_1)X(p_1) \neq Df(p_2)X(p_2)$. Bild. Auch: falls ein f -verwandtes Feld Y (zu X) existiert, ist es nicht eindeutig bestimmt, es sei denn, f ist surjektiv. Ist $f \in C^1(M, N)$ aber ein Diffeomorphismus, so gibt es genau ein f -verwandtes Feld, nämlich den **pushforward** von X unter f .

Definition 5.9 Sei $f \in C^1(M, N)$ ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N . Für ein Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$ ist das eindeutig bestimmte, f -verwandte Feld $Y : N \rightarrow TN$ gegeben durch

$$Y = Df \cdot (X \circ f^{-1}) \quad (\text{d.h. } Y(q) := Df(f^{-1}(q))X(f^{-1}(q)), \forall q \in N)$$

und heißt **pushforward** f_*X von X unter f : $(f_*X)(q) := Y(q) = Df(f^{-1}(q))X(f^{-1}(q))$. Für $f \in C^{k+1}(M, N)$ und $X \in C^k(M, TM)$ ist f_*X in $C^k(N, TN)$.

Sind $f \in C^1(M, N)$ und $g \in C^1(N, P)$ diffeomorph, so folgt für ein Vektorfeld $X : M \rightarrow TM$ aus der Kettenregel

$$(g \circ f)_*X = D(g \circ f) \cdot (X \circ (g \circ f)^{-1}) = Dg \cdot ((Df \cdot (X \circ f^{-1})) \circ g^{-1}) = g_*(f_*X). \quad (5.39)$$

Lemma 5.10 Sei $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$, eine Karte von M und $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld mit lokaler Darstellung $X = \sum_{j=1}^n \phi X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Dann ist der pushforward von X unter φ gegeben durch

$$\phi_*X = \tilde{X} : V \rightarrow TV, \tilde{X}(y) = (\xi^1(y), \dots, \xi^n(y))|_y \in T_yV,$$

wobei $\xi^1(y) = (\phi^1 X^1 \circ \varphi^{-1})(y), \dots, \xi^n(y) = (\phi^n X^n \circ \varphi^{-1})(y)$. $c : I \rightarrow U$ ist genau dann Integralkurve von X , wenn $\gamma = \varphi \circ c : I \rightarrow V$ Integralkurve des Vektorfelds ξ ist, im Sinne von

$$\gamma'(t) = ((\gamma^1)'(t), \dots, (\gamma^n)'(t)) = (\xi^1(\gamma(t)), \dots, \xi^n(\gamma(t))) = \xi(\gamma(t)),$$

für alle $t \in I$ (diese Gleichung ist eine GDG in $\mathbb{R}^n$).

BEWEIS: Nach Definition des pushforward und Definition 3.19 gilt

$$\begin{aligned} \varphi_* X(y) &= D\varphi(\phi^{-1}(y)) \cdot (X \circ \phi^{-1})(y) \\ &= \sum_{j=1}^n (\phi^j X^j \circ \phi^{-1})(y) D\varphi(\phi^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(\phi^{-1}(y)) \\ &= \sum_{j=1}^n \xi^j(y) e_j(y). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Lemmata 5.7 und 5.5, wobei für die Rückrichtung benutzt wird, dass $X = (\varphi^{-1})_*(\varphi_* X) = (\varphi^{-1})_* \tilde{X}$ nach (5.39). □

Die Gleichung (5.38) für Integralkurven ist also lokal ein autonomes System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die relevante Theorie im $\mathbb{R}^n$ liefert in Verbindung mit Lemma 5.10 folgende Aussagen zur Eindeutigkeit, Existenz und differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert:

Satz 5.11 Sei $X \in C^1(\mathcal{X}(M))$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Sind $c_k : I_k \rightarrow M$ Integralkurven von X mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $c_1 = c_2$ auf $I_1 \cap I_2$ und die zusammengesetzte Kurve

$$c : I_1 \cup I_2 \rightarrow M, c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \in I_1 \\ c_2(t) & \text{für } t \in I_2 \end{cases}$$

ist wieder eine Integralkurve von X .

- (ii) Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U_p und ein $\delta_p > 0$, so dass, für alle $q \in U_p$ gilt: das Anfangswertproblem $c' = X \circ c$, $c(0) = q$ hat eine Lösung $c_q : (-\delta_p, \delta_p) \rightarrow M$.
- (iii) Ist $X \in C^k(\mathcal{X}(M))$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und U_p, δ_p, p wie oben, so ist die Abbildung $\Phi : U_p \times (-\delta_p, \delta_p) \rightarrow M$, $\Phi(q, t) = c_q(t)$, von der Klasse C^k .

Bemerkung Hier sind I_1, I_2 Intervalle. Wir gehen davon aus, dass $^\circ I_i$ nicht leer sind: Für z.B. $I_1 = [a, a]$, machen die Aussagen wenig Sinn und sind uninteressant. ABER: es kann aber durchaus vorkommen, dass $I_1 \cap I_2 = \{a\}$ nur einen Punkt enthält.

BEWEIS:

Für (i) betrachte die Menge $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$.

- J ist abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$: Sei $t_i \in I_1 \cap I_2$, $t_i \rightarrow s \in I_1 \cap I_2$. $c_1(t_i) \rightarrow c_1(s)$ und $c_2(t_i) \rightarrow c_2(s)$ (da $c_i \in C^1(I_i, M)$), und $c_1(t_i) = c_2(t_i)$ impliziert $c_1(s) = c_2(s)$. Nach Voraussetzung ist J nicht leer, da $t_0 \in J$. Aber J ist auch offen in $I_1 \cap I_2$; dies sehen wir durch Anwendung des Eindeutigkeitsatzes und Existenzsatzes im $\mathbb{R}^n$ in einer lokalen Karte gemäß Lemma 5.10. Genauer gesagt: sei $t_0 \in J$ dann von Picard-Lindelof, existiert eine Lösung $\alpha : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow M$ mit $\alpha(t_0) = c_1(t_0) = c_2(t_0)$. Eindeutigkeit auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_2 \cap I_1$ impliziert, dass $\alpha|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_2 \cap I_1} = c_2|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_2 \cap I_1} = c_1|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_2 \cap I_1}$ also, $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I_2 \cap I_1 \subset J$ (wie erwünscht).

Also gilt $J = I_1 \cap I_2$, das heißt die Lösungen stimmen auf $I_1 \cap I_2$ überein. Die Lösungseigenschaft der zusammengesetzten Kurve sieht man wieder mit der Eindeutigkeit/Existenz für den Lokal (im $\mathbb{R}^n$) Fall: Sei $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Von Picard-Lindelof, existiert eine Lösung $\alpha : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow M$ mit $\alpha(t_0) = c_1(t_0) = c_2(t_0)$. Eindeutigkeit auf $[t_0, t_0 + \delta) \cap I_2$ impliziert, dass $\alpha|_{[t_0, t_0 + \delta) \cap I_2} = c_2|_{[t_0, t_0 + \delta) \cap I_2}$. Eindeutigkeit auf $(t_0 - \delta, t_0] \cap I_1$ impliziert, dass $\alpha|_{(t_0 - \delta, t_0] \cap I_1} = c_1|_{(t_0 - \delta, t_0] \cap I_1}$. Also die zusammengesetzte Kurve c hat, $c|_{((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap (I_1 \cup I_2))} = \alpha|_{((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap (I_1 \cup I_2))}$ und ist insbesondere eine Lösung, und in C^1 . Also, c ist eine Integralkurve. Die Behauptungen (ii) und (iii) sind direkte Konsequenzen der entsprechenden Aussagen im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit Lemma 5.10 (siehe Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, oder Kuwert, Skript AnaII).

□

Bemerkung Es ist nicht unwesentlich, dass das Lösungsintervall in Satz 5.11(ii) lokal gleichmäßig gewählt werden kann. Dies ist Konsequenz der Tatsache, dass im $\mathbb{R}^n$ die Größe des Intervalls I für eine Lösung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c(0) = x_0$ (von Picard-Lindelof) ist nur von der C^1 -Norm des Vektorfelds X auf einer Kugel $B_\rho(x_0) \subset V$, und vom Radius dieser Kugel, abhängig.

Beispiel 5.12 (a) Ist nur $X \in C^0(\mathcal{X}(M))$, so gilt das Eindeutigkeitsresultat im allgemeinen nicht. Betrachte dazu die Gleichung $\gamma' = X(\gamma)$ mit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $X(x) = \sqrt{|x|}$: also die Gleichung ist $\gamma' = \sqrt{|\gamma|}$. Es gibt eine Schar von C^1 -Lösungen mit $\gamma(0) = 0$, die von zwei Parametern $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$ abhängt:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - t_1)^2 & t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{1}{4}(t - t_2)^2 & t \geq t_2. \end{cases}$$

(b) Beispiel dafür, dass die Integralkurven nicht immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden können, liefert die Gleichung $\gamma' = X(\gamma) = \gamma^2$ (also $X(x) = |x|^2$). Die maximale Integralkurve mit $\gamma(0) = x_0 \neq 0$ ist

$$\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \text{ mit } t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}) \text{ falls } x_0 > 0,$$

und

$$\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \text{ mit } t \in (\frac{1}{x_0}, \infty) \text{ falls } x_0 < 0.$$

Dieses Beispiel unterscheidet sich von Beispiel 5.3, da hier $X : \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}$ ist auf ganz $M = \mathbb{R}$ definiert (im Beispiel 5.3 war $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

Folgerung 5.13 Sei $X \in C^1(\mathcal{X}(M))$. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine maximale Integralkurve $c_p : I_p \rightarrow M$ von X mit $c_p(0) = p$, und es gilt:

- (i) $I_p = (\alpha_p, \omega_p)$ ist ein offenes Intervall mit $-\infty \leq \alpha_p < 0 < \omega_p \leq \infty$.
- (ii) Ist $c : I \rightarrow M$ Integralkurve von X mit $c(0) = p$, so gilt $I \subset I_p$ und $c = c_p|_I$.
- (iii) Zu $K \subset M$ kompakt gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset (\alpha_p, \omega_p)$ für alle $p \in K$.

BEWEIS: Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \inf\{a < 0 : \text{es gibt eine Integralkurve } c : (a, 0] \rightarrow M \text{ mit } c(0) = p\}, \\ \omega_p &= \sup\{b > 0 : \text{es gibt eine Integralkurve } c : [0, b) \rightarrow M \text{ mit } c(0) = p\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 5.11(ii) gilt $\alpha_p < 0 < \omega_p$, und mit Satz 5.11(i) erhalten wir eine wohldefinierte Lösung $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \rightarrow M$ des Anfangswertproblems. Wäre c_p zum Beispiel auf $(\alpha_p, \omega_p]$ fortsetzbar (d.h. es existiert $q \in M$, so dass $c(t) \rightarrow q$ mit $t \rightarrow \omega_p$ von unten), so gibt es nach Satz 5.11(ii) für geeignetes $\delta > 0$ eine Integralkurve $c : (\omega_p - \delta, \omega_p + \delta) \rightarrow M$ mit $c(\omega_p) = c_p(\omega_p)$, und wir erhalten eine Fortsetzung von c_p auf das Intervall $(\alpha_p, \omega_p + \delta)$ im Widerspruch zur Definition von ω_p . Also ist $c_p : I_p = (\alpha_p, \omega_p) \rightarrow M$ maximale Integralkurve. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus Satz 5.11(i) und der Maximalität. Schließlich ergibt sich Behauptung (iii) aus Satz 5.11(iii) mit einem Überdeckungsargument. $\square$

Korollar 5.14 Sei $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \rightarrow M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^1(\mathcal{X}(M))$ mit Anfangswert $c_p(0) = p$. Gilt dann $\omega_p < \infty$ (bzw. $\alpha_p > -\infty$), so gibt es zu $K \subset M$ kompakt ein $t^K < \omega_p$ (bzw. $t_K > \alpha_p$), so dass gilt:

$$c_p(t) \notin K \text{ für alle } t > t^K \quad (\text{bzw. } c_p(t) \notin K \text{ für alle } t < t_K).$$

Hat X kompakten Träger auf M , so gilt $(\alpha_p, \omega_p) = (-\infty, \infty)$.

Definition 5.15 Sei X ein C^1 Vektorfeld auf M , dessen Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind (für alle $p \in M$). Dann heißt X vollständig integrierbar.

BEWEIS: Sei $\omega_p < \infty$. Dann gilt $\omega_{c_p(t)} = \omega_p - t \searrow 0$ mit $t \nearrow \omega_p$. Wegen Folgerung 5.13(iii) gilt $c_p(t) \notin K$ für t hinreichend groß. Wäre $\omega_p < \infty$ im Fall $K := \text{spt } X$ kompakt, so folgt $c_p(t) \notin K$ für $t > t_K$, also $c'_p(t) = X(c_p(t)) = 0$ für $t > t^K$. Aber dann ist $c_p(t)$ konstant für $t > t^K$, und wir können die Lösung konstant auf (t^K, ∞) fortsetzen, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Ab jetzt nehmen wir einen etwas anderen Standpunkt ein und betrachten die Integralkurve c_p in Abhängigkeit von ihrem Anfangswert p .

Definition 5.16 Für $X \in C^1(\mathcal{X}(M))$ bezeichne $c_p : I_p \rightarrow M$ die maximale Integralkurve mit $c_p(0) = p$, und $M^X = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$. Der Fluss von X ist die Abbildung

$$\Phi : M^X \rightarrow M, \Phi(p, t) = c_p(t).$$

Wir setzen $M_t^X = \{p \in M : t \in I_p\}$ und $\Phi_t : M_t^X \rightarrow M, \Phi_t(p) = c_p(t)$.

Lemma 5.17 Sei $X \in C^1(\mathcal{X}(M))$ mit Fluss $\Phi : M^X \rightarrow M$ und maximalen Existenzintervallen I_p für $p \in M$. Ist $Y = f_*X$ der pushforward von X unter einem Diffeomorphismus $f \in C^2(M, N)$, so ist der Fluss von Y gegeben durch

$$\Psi : N^Y = \bigcup_{q \in N} \{q\} \times I_{f^{-1}(q)} \rightarrow N, \Psi(t, y) = f(\Phi(f^{-1}(x), t)).$$

BEWEIS: Dies ist offensichtliche Konsequenz von Lemma 5.7. □

Lemma 5.18 Für den Fluss $\Phi_t : M_t^X \rightarrow M$ von $X \in C^1(TM)$ gilt $\Phi_0 = \text{id}_M$ und

$$\Phi_s \circ \Phi_l = \Phi_{s+l} \text{ auf } M_l^X \cap M_{s+l}^X. \quad (5.41)$$

BEWEIS: Ist $t_1 \leq t_2 \in \mathbb{R}$ und $p \in M_{t_1}^X \cap M_{t_2}^X$ so gilt $p \in M_r^X$ für alle $r \in [t_1, t_2]$ (da für $c_p : I_p \rightarrow M$ gilt $t_1, t_2 \in I_p$, und so $[t_1, t_2] \subset I_p$). Setze $I = [0, s]$ bzw. $I = [s, 0]$ je nach Vorzeichen von s (annahme $s \geq 0$). Für $\sigma \in I$ liegt $\sigma + l$ zwischen l und $s + l$, also für $p \in M_l^X \cap M_{s+l}^X$ ist $p \in M_{l+\sigma}^X$. Dies bedeutet, dass die C^1 -Kurve $c : I \rightarrow M, c(\sigma) = c_p(\sigma + l)$ wohldefiniert ist, und

$$c'(\sigma) = c'_p(\sigma + l) = X(c_p(\sigma + l)) = X(c(\sigma)), \quad c(0) = c_p(l)$$

gilt. Nach Definition folgt $\Phi_l(p) \in M_s^X$ und $\Phi_s(\Phi_l(p)) = c_{c_p(l)}(s) = c_p(s + l) = \Phi_{s+l}(p)$. □

Folgerung 5.19 Sei $X \in C^k(\mathcal{X}(M))$. Der Fluss $\Phi : M^X \rightarrow M$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) Die Mengen $M^X \subset M \times \mathbb{R}$ sowie $M_t^X \subset M$ sind offen.
- (ii) $\Phi : M^X \rightarrow M$ ist von der Klasse C^k .
- (iii) $\Phi_t : M_t^X \rightarrow M_{-t}^X$ ist ein C^k -Diffeomorphismus.

BEWEIS: i) und ii) Wir nehmen an, dass $t_0 > 0$ und $(p, t_0) \in M^X$. D.h. es existiert eine Lösung des Flusses $c : [0, t_0] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$.

- Es existiert eine offene U mit $c([0, t_0]) \subset U$, so dass $\phi : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ wohldefiniert und C^k ist. Überdecke $c([0, t_0])$ (Kompaktheit) mit endlich vielen U_{p_i} 's von 5.11 (iii), und setze $\delta := \min\{\delta_{p_i}\}$, $U = \bigcup_{i=1}^N U_{p_i}$.

- O.B.d.A. (wir können δ kleiner wählen) ist $N\delta = t_0$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

$\phi_{\frac{\delta}{2}}(p) \in U$ impliziert, es existiert $U_1 \subset U$ mit $\phi_{\frac{\delta}{2}}(U_1) \subset U$ (da $\phi : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ C^k ist, also insbesondere stetig). $\phi(\phi_{\frac{\delta}{2}}(\cdot), \cdot) : U_1 \times (-\delta, \delta)$ ist dann C^k und wohldefiniert. Insbesondere, $\psi : U_1 \times (-\frac{\delta}{2}, \frac{3\delta}{2}) \rightarrow M$, $\psi(x, t) = \phi(\phi_{\frac{\delta}{2}}(x), t - \frac{\delta}{2})$ ist w.d. und C^k . ψ ist auch eine Lösung des Flusses, mit $\psi(x, \frac{\delta}{2}) = \phi_{\frac{\delta}{2}}(x) = \phi(x, \frac{\delta}{2})$ also (wegen der Eindeutigkeit von Lösungen, 5.11 (i)) $\psi(x, \cdot)|_{(0, \delta)} = \phi(x, \cdot)|_{(0, \delta)}$. D.h.

$$\hat{\phi} : U_1 \times (-\delta, \frac{3\delta}{2}) \rightarrow M,$$

$$\hat{\phi}(x, t) := \begin{cases} \phi(x, t), & t \in (-\delta, \frac{\delta}{2}) \\ \psi(x, t), & t \in [\frac{\delta}{2}, \frac{3\delta}{2}) \end{cases}$$

ist w.d. C^k Lösung des Flusses. D.h. $\phi = \hat{\phi} : U_1 \times (-\delta, \frac{3\delta}{2}) \rightarrow M$.

- Induktiv vorgehen: hier ist der nächste Schritt. $\phi_{\delta}(p) \in U$. Also, es existiert ein $U_2 \subset U_1 \subset U$, so dass $\phi_{\delta}(U_2) \subset U$ ($\phi_{\delta} : U_1 \rightarrow M$ ist w.d. von Schritt 1). Das impliziert, $\phi(\phi_{\delta}(\cdot), \cdot) : U_2 \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ist w.d. C^k Lösung des Flusses, oder (äquivalent) $\phi(\phi_{\delta}(\cdot), \cdot - \delta) : U_2 \times (0, 2\delta) \rightarrow M$ ist w.d. und C^k Lösung des Flusses mit $\phi(\phi_{\delta}(\cdot), \cdot - \delta)(x, \delta) = \phi(x, \delta)$ für alle $x \in U_2$. Eindeutigkeit impliziert, $\phi(\phi_{\delta}(x), \cdot - \delta)|_{(0, \frac{3\delta}{2})} = \phi(x, \cdot)|_{(0, \frac{3\delta}{2})}$ für alle $x \in U_2$ (RHS ist wohldefiniert von ersten Induktion Schritt), d.h. $\phi : U_2 \times (-\delta, 2\delta) \rightarrow M$ ist w.d. und C^k . usw.

$\phi : U_N \times (-\delta, N\frac{\delta}{2} + \delta) \rightarrow M$ ist w.d. und C^k . Also $U_N \times (-\delta, t_0 + \delta) \subset M^X$ falls $(p, t_0 = N\frac{\delta}{2}) \in M^X$.

Nach Lemma 5.18 gilt $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \text{id}$ auf M_t^X für $t \in \mathbb{R}$, woraus sich Behauptung (iii) ergibt. $\square$

Ist das Vektorfeld $X \in C^1(TM)$ vollständig integrierbar, das heißt alle Flusskurven sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so liefert der Fluss eine Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), t \mapsto \Phi_t, \quad \text{mit } \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}.$$

Diese Abbildung nennt man die von X erzeugte Einparametergruppe von Diffeomorphismen von M .

Definition 5.20 Wir führen folgende Notation ein: für eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ ist $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = {}^{\phi} \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ (also ${}^{\phi}$ wird weggelassen). Für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ , $p \in M$ ist $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p))$ (also hängt von Koordinaten ab).

Satz 5.21 Seien $X, Y \in C^k(\mathcal{X}(M))$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes C^{k-1} -Vektorfeld, die Lieklammer $[X, Y]$ von X und Y , so dass gilt:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M). \quad (5.42)$$

d.h.

$$[X, Y](p)(f) = X(p)(Y(f)) - Y(p)(X(f))$$

für alle $p \in M$, wobei $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist die C^∞ Funktion, $(X(f))(q) = X(q)(f)$.
Bezüglich einer Karte $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ hat $[X, Y]$ die Koordinatendarstellung

$$\sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (5.43)$$

BEWEIS: Wir berechnen bzgl. einer lokalen Karte $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Nach dem Satz von Schwarz heben sich die zweiten Ableitungen bei Vertauschung und Subtraktion weg, und es folgt

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Wir definieren nun das Vektorfeld $[X, Y]$ auf U durch (5.43). Dann ist $[X, Y] \in C^{k-1}(TU)$ wohldefiniert und hat auf U die gewünschte Eigenschaft (5.42). Aber $X(Yf) - Y(Xf)(p) = X(p)(Y(f)) - Y(p)(X(f))$ ist wohldefiniert und koordinaten unabhängig. Deshalb stimmen die Definitionen auf den Überlappungsgebieten der einzelnen Karten überein, und wir erhalten ein wohldefiniertes C^{k-1} -Vektorfeld auf ganz M . $\square$

Lemma 5.22 Für Vektorfelder $X, Y, Z \in C^k(\mathcal{X}(M))$ mit $k \geq 1$ gilt:

- (i) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Y] + \mu[Y, Z]$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (ii) $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, falls $k \geq 2$.
- (iii) Für die Basisfelder einer Karte ist $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

BEWEIS: Die Aussagen folgen aus der Definition. Für (iii) berechnen wir mit $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z]f &= [X, Y]Zf - Z[X, Y]f \\ &= \underbrace{XYZf}_{\text{zyklisch}} - \underbrace{YXZf}_{\text{antizyklisch}} - \underbrace{ZXYf}_{\text{zyklisch}} + \underbrace{ZYXf}_{\text{antizyklisch}}. \end{aligned}$$

Also heben sich bei zyklischer Vertauschung und Addition alle Terme weg. Behauptung (iv) folgt aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. $\square$

Bemerkung. Die Lieklammer ist nicht bilinear über $C^\infty(M)$, sondern es gilt

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y \quad \text{bzw.} \quad [fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X. \quad (5.44)$$

Was ist nun die geometrische Bedeutung der Lieklammer? Wir wollen zeigen, dass das Verschwinden der Lieklammer von zwei Vektorfeldern X, Y – man spricht dann von kommutierenden Vektorfeldern – gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörigen Flüsse der Vektorfelder kommutieren. Dazu zunächst folgendes Lemma.

Lemma 5.23 *Sei $f \in C^2(M, N)$ Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y} \in C^1(\mathcal{X}(N))$ seien f -verwandt zu den Vektorfeldern $X, Y \in C^1(\mathcal{X}(M))$, das heißt $Df \cdot X = \tilde{X} \circ f$ und $Df \cdot Y = \tilde{Y} \circ f$. Dann ist auch $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ f -verwandt zu $[X, Y]$:*

$$Df \cdot [X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ f,$$

d.h.

$$Df(q)([X, Y](q)) = [\tilde{X}, \tilde{Y}](f(q)),$$

für alle $q \in M$.

BEWEIS: Der Beweis geschieht durch konsequentes Anwenden der Definitionen. Notation: für ein Vektorfeld $V \in C^1(\mathcal{X}(N))$ ist $(V \circ f)(q) = V(f(q)) \in T_{f(q)}(N)$. Für ein $l \in C^\infty(N, R)$ ist $V(l) \circ f \in C^\infty(M, R)$ die Funktion $(V(l) \circ f)(x) = V(f(x))(l)$. Sei $g \in C^\infty(N, R)$. Wir berechnen für $g \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} (Df(q) \cdot [X, Y](q))(g) &= [X, Y](q)(g \circ f) \\ &= (X(q)Y - Y(q)X)(g \circ f) \\ &= (X(q)(Y(g \circ f)) - Y(q)(X(g \circ f))) \end{aligned}$$

Zwischen Rechnung:

$$\begin{aligned} Y(p)(g \circ f) &= (Df(p)(Y(p)))(g) \\ &= \tilde{Y}(f(p))(g) \\ &= (\tilde{Y} \circ f)(p)(g) \\ &= (\tilde{Y}(g) \circ f)(p) \end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned} (Df(q) \cdot [X, Y](q))(g) &= X((\tilde{Y}(g)) \circ f) - Y((\tilde{X}(g)) \circ f) \\ &= Df(q)(X(q))(\tilde{Y}(g)) - Df(q)(Y(q))(\tilde{X}(g)) \\ &= \tilde{X}(f(q))(\tilde{Y}(g)) - \tilde{Y}(f(q))(\tilde{X}(g)) \\ &= [\tilde{X}, \tilde{Y}](f(q))(g) \\ &= ([\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ f)(q)(g) \end{aligned}$$

wie erwünscht. □

Definition 5.24 (die euklidische Version der Lie-Klammer) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, und $X, Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 . Definiere $[X, Y](x) := DY(x)(X(x)) - DX(x)(Y(x))$, für $x \in U$ (gewöhnliche Ableitungen). Falls $\hat{X} : U \rightarrow TU$ und $\hat{Y} : U \rightarrow TU$ die zugehörige Vfelder sind ($\hat{X}(x) = X(x)|_x, \hat{Y}(x) = Y(x)|_x$) dann gilt $[\hat{X}, \hat{Y}](x) = [X, Y](x)|_x$, wie man leicht von der Koordinatendarstellung der Lie-Klammer sieht (siehe Defn. Lie Klammer).

Definition 5.25 Sei M diff.Mann. und $p \in M$ fixiert. Sei $T : [0, 1] \rightarrow T_p M$. $T : [0, 1] \rightarrow T_p M$ ist C^k genau dann, wenn $T(s) = \sum_{i=1}^n T^i(s) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ mit $T^i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ C^k . Mit $\frac{\partial}{\partial s} T(s)$ meinen wir der Vektor $\frac{\partial}{\partial s} T(s) \in T_p M$ der durch $(\frac{\partial}{\partial s} T(s)|_{s=s_0}(f) = \frac{\partial T(s)(f)}{\partial s}(s_0)$ (w.d. Vektor). Man checkt leicht nach, dass $(\frac{\partial}{\partial s} T(s)|_{s=s_0}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T^i}{\partial s}(s_0) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$.

Satz 5.26 Seien $X, Y \in C^2(\mathcal{X}(M))$ und $\Phi : M^X \rightarrow M$ der Fluss von X . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}((\Phi_t)_* Y)(p)|_{t=0} = -[X, Y](p). \quad (5.45)$$

BEWEIS: Sei zuerst $M = V$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $x \in V$, und $X, Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^2 , und $\Phi \in C^2$ die Lösung zur $\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, t)) = X(\Phi(x, t))$. Nach Satz 5.11(iii), erhalten wir aus $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(y, 0) = X(y)$ sowie aus $\Phi_0 = \text{id}$ bzw. $D\Phi_0(x) = \text{Id}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D\Phi_t(\Phi_{-t}(x))Y(\Phi_{-t}(x))|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(\Phi_{-t}(x) + sY(\Phi_{-t}(x)), t)|_{s,t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (-D\Phi_0(x)(X(x) + sDY(x)X(x)) + X(x + sY(x)))|_{s=0} \\ &= -DY(x)X(x) + DX(x)Y(x) \\ &= -[X, Y](x). \end{aligned}$$

Dabei wurde die euklidische Version der Lie-Klammer am Ende benutzt. Sei $\hat{X}, \hat{Y} : U \rightarrow TU$ die zugehörige Vfelder. Man zeigt mit den standard Koordinaten $\text{Id} : V \rightarrow V$, dass

$$(\Phi_t)_* \hat{Y}(x) = D\Phi_t(\Phi_{-t}(x))(\hat{Y}(\Phi_{-t}(x))) = D\Phi_t(\Phi_{-t}(x))(Y(\Phi_{-t}(x)))|_x.$$

Das impliziert

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t)_* \hat{Y}(x)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(D\Phi_t(\Phi_{-t}(x))(Y(\Phi_{-t}(x)))|_x)|_{t=0} \quad (5.46)$$

$$= -[X, Y](x)|_x = -[\hat{X}, \hat{Y}](x). \quad (5.47)$$

Der Fall $M = V \subset \mathbb{R}^n$ ist damit bewiesen.

In einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , sei $p \in M$ und $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ Koordinaten $p \in U$. Sei $X, Y : U \rightarrow TM$ Vfelder, und sei $\hat{X} = \psi_* X$, und $\hat{Y} = \psi_* Y$. Wenn $\Phi : \tilde{V} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ ($\tilde{V} \subset V$ kleine Umgebung) der Fluss von $\hat{X}$ ist, dann ist

$\Psi : \tilde{U} \rightarrow U$, $\Psi(x, t) = \psi^{-1}(\Phi(\psi(x), t)) = \psi^{-1} \circ \Phi_t \circ \psi(x)$ der Fluss von X (see Lemma 5.17). Aber dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}((\Psi_t)_* Y)(x)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}((\psi^{-1})_* \circ (\Phi_t)_* \circ \psi_* Y)(x)|_{t=0} \quad (5.48)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}((\psi^{-1})_* \circ (\Phi_t)_* \hat{Y})(x)|_{t=0} \quad (5.49)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(D\psi^{-1})(\psi(x)) \left((\Phi_t)_* \hat{Y}(\psi(x)) \right) \quad (5.50)$$

$$= D(\psi^{-1})(\psi(x)) \left(-[\hat{X}, \hat{Y}](\psi(x)) \right) \quad (5.51)$$

$$= -[X, Y](x) \quad (5.52)$$

wie erwünscht, wegen des Lemmas 5.23.

Der Einfachheit halber setzen wir in der nachstehenden Aussage voraus, dass die Flüsse global definiert sind.

Folgerung 5.27 *Die Vektorfelder $X, Y \in C^2(\mathcal{X}(M))$ seien vollständig integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[X, Y] = 0$ auf M .

(ii) $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$, wobei Φ_s, Ψ_t die Flüsse von X bzw. Y sind.

BEWEIS: Wir zeigen zuerst die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i). Und zwar folgt für $p \in M$ durch sukzessive Anwendung von $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ und $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$, wobei Satz 5.26 benutzt wird:

$$\begin{aligned} (\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t})(p) &= \Psi_s(p) \\ \Rightarrow D\Phi_t \cdot Y(\Phi_{-t}(p)) &= Y(p) \\ \Rightarrow -[X, Y](p) &= 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt berechnen wir mit $\Phi_{t_0+s} = \Phi_{t_0} \circ \Phi_s$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{t*} Y)(p)|_{t=t_0} &= \frac{\partial}{\partial s}((\Phi_{t_0+s})_* Y)(p)|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} D\Phi_{t_0}(\Phi_{-t_0}(p)) \left(\Phi_{s*} Y(\Phi_{-t_0}(p)) \right) \\ &= D\Phi_{t_0}(\Phi_{-t_0}(p)) \frac{\partial}{\partial s} \left(\Phi_{s*} Y(\Phi_{-t_0}(p)) \right) \\ &= -D\Phi_{t_0}(\Phi_{-t_0}(p))([X, Y](\Phi_{-t_0}(p))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt $D\Phi_t(\Phi_{-t}(p)) \left(Y(\Phi_t(p)) \right) = Y(p)$ für alle $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$. Für $c(s) := (\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t})(p)$ folgt

$$c'(s) = D\Phi_t(\Psi_s \circ \Phi_{-t}(p)) \left(Y(\Psi_s \circ \Phi_{-t}(p)) \right)$$

$$= D\Phi_t(\Phi_{-t} \circ \Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t}(p)) \left(Y(\Phi_{-t} \circ \Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t}(p)) \right) = Y(c(s)) \quad (5.53)$$

sowie natürlich $c(0) = p$. Die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (Satz 5.11(i)) liefert $c(s) = \Psi_s(p)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, und folglich

$$\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_t^{-1} = \Psi_s \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

□

6 Tensoren und Tensorfelder

In der Differentialgeometrie und auch in der Physik treten in vielen Situationen Multilinearformen bzw. vektorwertige multilineare Abbildungen auf. Um diese systematisch zu behandeln, werden wir Tensoren und Tensorfelder einführen.

Definition 6.1 Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. V^* ist der Dualraum (zu V). V^* ist die Menge aller linearen Abbildungen $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ (l heißt **linear funktional** oder **kovektor**).

Bemerkung 6.2 Von LA , wissen wir folgendes:

1. Falls $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für V ist, so ist $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ eine Basis für V^* , wobei ω^j ist durch $\omega^j(\sum_{i=1}^n a^i v_i) = a^j$ definiert
2. Für alle $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n \omega^i(v) v_i$
3. $J : V \rightarrow V^*$, $J(\sum_{i=1}^n a^i v_i) := \sum_{i=1}^n a^i \omega^i$, ist ein wohldefinierter V -Raum Isomorphismus, der von der Wahl der Basis $v_1, \dots, v_n$ abhängig ist.
4. Zwischen $V^{**} = (V^*)^*$ und V existiert ein Isomorphismus I der nicht von der Wahl einer Basis abhängig ist: $I(v)(\omega) := \omega(v)$.

Definition 6.3 Sei $V_1, \dots, V_m$ $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Eine multilineare Abbildung

$$T : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Tensor**. Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein Tensor $T : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $V_i = V$ oder $V_i = V^*$ für alle $i = 1, \dots, m$, heißt **Tensor über V** . Falls

$$T : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V^* \times V^* \dots V^*}_{s \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Tensor über V ist, dann heißt T ein Tensor über V von typ $\binom{r}{s}$. Die Menge von Tensoren über V von typ $\binom{r}{s}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^r(V)$. Sie ist ein Vektorraum mit $+$, $\cdot$ wie üblich definiert: $(aT + bS)(\dots) = a(T(\dots)) + b(S(\dots))$.

Bemerkung 6.4 Es gilt: $\mathcal{T}_0^1(V) = V^*$. $\mathcal{T}_1^0(V) = V^{**} \sim V$ durch die Isometrie I .

Definition 6.5 Sei $T : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow \mathbb{R}$ und $S : W_1 \times W_2 \times \dots \times W_k \rightarrow \mathbb{R}$ Tensoren. Dann $T \otimes S$ ist der Tensor $T \otimes S : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \times W_1 \times W_2 \times \dots \times W_k \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k) = T(v_1, \dots, v_m) \cdot S(w_1, \dots, w_k)$$

definiert wird. Wenn T ein Tensor über V ist, und S ein Tensor über V ist, dann ist $T \otimes S$ ein Tensor über V .

Proposition 6.6 Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis für V . Dann ist

$$\{\omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \dots \omega^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes v_{j_2} \dots \otimes v_{j_s} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n\}$$

eine Basis für $\mathcal{T}_s^r(V)$. Also $\mathcal{T}_s^r(V)$ hat Dimension $n^{(r+s)}$. Hier sind die $v_{i_k} \in V$ als Elemente von $V^{**} = \mathcal{T}_1^0(V) \sim V$ zu verstehen, $v_{i_k}(\omega) = \omega(v_{i_k})$. Also, die Elemente sind tatsächlich in $\mathcal{T}_s^r(V)$.

Beweis: LU: Sei

$$A = \sum_{1 \leq i_k \leq n, 1 \leq j_l \leq n, (1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s)} a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \dots \omega^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes v_{j_s}.$$

$A = 0$, impliziert $0 = A(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, \omega^{j_1}, \dots, \omega^{j_s}) = a_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$, für alle $1 \leq i_k \leq n, 1 \leq j_l \leq n, (1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s)$.

Sei $A \in \mathcal{T}_s^r(V)$. Setze

$$A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} := A(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, \omega^{j_1}, \dots, \omega^{j_s}).$$

Die Multilinearität von A impliziert, dass

$$A = \sum_{1 \leq i_k \leq n, 1 \leq j_l \leq n, (1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s)} A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \dots \omega^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes v_{j_s} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s.$$

Definition 6.7 Sei M eine n -dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Tensorbündel von M von Typ $\binom{r}{s}$ ist $\mathcal{T}_s^r(M)$ ist

$$\mathcal{T}_s^r(M) := \cup_{p \in M} (\mathcal{T}_p)_s^r(M)$$

wobei $(\mathcal{T}_p)_s^r(M) = \mathcal{T}_s^r(\mathcal{T}_p M)$. Wir haben die projektion $\pi : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow M$, $\pi(R) = p \iff R \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{T}_p M)$.

Bemerkung 6.8 Speziellfälle sind:

$$\mathcal{T}_0^1(M) = \cup_{p \in M} \mathcal{T}_0^1(\mathcal{T}_p M) = \cup_{p \in M} (\mathcal{T}_p M)^* =: T^* M,$$

siehe Bemerkung 6.4, und

$$\mathcal{T}_1^0 M = \cup_{p \in M} \mathcal{T}_1^0(\mathcal{T}_p M) = \cup_{p \in M} (\mathcal{T}_p M)^{**} = \cup_{p \in M} (\mathcal{T}_p M) = TM,$$

wobei eine die Gleichheits ist eigentlich eine Identifikation $(\mathcal{T}_p M)^{**}$ mit $\mathcal{T}_p M$ (von Bemerkung 6.2).

Definition 6.9 Ein r -fach kovariantes, s -fach kontravariantes Tensor oder $\binom{r}{s}$ Tensor (auf M) ist eine Abbildung $T : M \rightarrow T_s^r M$ mit $\pi(T(p)) = p$. Die Menge solche Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_s^r(M)$. Die Bezeichnung $\binom{r}{s}$ Tensor wird sehr häufig benutzt.

Definition 6.10 Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ koordinaten $p \in U$. Dann ist $dx^i(p) \in (T_p M)^*$ durch $dx^i(p)(\sum_{j=1}^n V^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p)) = V^i$ definiert. Die Abbildung $dx^i : U \rightarrow T_0^1 U, p \rightarrow dx^i(p)$ ist ein 10 Tensor auf U . Es gilt $dx^i(p) = D\phi^i(p)$. $\{dx^1(p), dx^2(p), \dots, dx^n(p)\}$ ist die duale Basis zur $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \frac{\partial}{\partial x^2}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$, wie man von der defn. leicht sieht. Wegen Lemma 6.6 ist

$$\{dx^{i_1}(p) \otimes dx^{i_2}(p) \dots dx^{i_r}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}(p) \dots \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}(p) | 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n\}$$

eine Basis für $T_s^r(T_p M) = (T_p)^r_s M$.

Bemerkung 6.11 Wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention: Wenn der gleiche Index oben und unten erscheint, dann wird darüber summiert. Beispiele: Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ Koord. auf eine n -dim. Mannig. M^n ,

- $v \in T_p M, v = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ bedeutet $v = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$.
- V ein m - dim. Vektorraum, $T = T_k^{ij} \omega^k \otimes v_i \otimes v_j \in T_2^1(V)$ bedeutet $T = \sum_{i,j,k=1}^m T_k^{ij} \omega^k \otimes v_i \otimes v_j$.
- $S = S_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \frac{\partial}{\partial x^k} \in T_1^2(U)$ bedeutet $S = \sum_{i,j,k=1}^n S_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \frac{\partial}{\partial x^k} \in T_1^2(U)$.

Bemerkung 6.12 Ein Vektorfeld ist auf natürliche Weise ein $\binom{0}{1}$ Tensor. $X(p)(\omega(p)) = \omega(p)(X(p))$.

Mit Hilfe der Basis in 6.10, kann man jede $\binom{r}{s}$ Tensor A lokal mit Koordinaten beschreiben:

$$A|_U = \sum_{1 \leq i_k \leq n, 1 \leq j_l \leq n, (1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s)} A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \dots dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, \quad (6.1)$$

wobei $A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen $A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}(p) = A(p)(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}(p), dx^{j_1}(p), \dots, dx^{j_r}(p))$.

Für $u \in (T_p)^r_s M$ und Koordinaten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ sei

$$u = \phi u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \phi dx^{i_1}(p) \otimes \phi dx^{i_2}(p) \dots \phi dx^{i_r}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}(p) \quad (6.2)$$

bezüglich der Basis die von ϕ kommt.

Falls $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ andere Koordinaten sind mit $p \in V$, dann gilt:

$$u = \psi u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \psi dx^{i_1}(p) \otimes \psi dx^{i_2}(p) \dots \psi dx^{i_r}(p) \otimes \psi \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(p) \otimes \psi \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}(p) \otimes \psi \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}(p)$$

bezüglich der Basis die von ψ kommt. Die Koeffizienten erfüllen

$$\begin{aligned} & \psi u_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(p) = \\ & \phi u_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}(p) \frac{\partial \phi^{k_1} \circ \psi^{-1}}{\partial x^{i_1}}(\tilde{p}) \frac{\partial \phi^{k_2} \circ \psi^{-1}}{\partial x^{i_2}}(\tilde{p}) \dots \frac{\partial \phi^{k_r} \circ \psi^{-1}}{\partial x^{i_r}}(\tilde{p}) \frac{\partial \psi^{j_1} \circ \phi^{-1}}{\partial x^{l_1}}(\tilde{\tilde{p}}) \frac{\partial \psi^{j_2} \circ \phi^{-1}}{\partial x^{l_2}}(\tilde{\tilde{p}}) \dots \frac{\partial \psi^{j_s}}{\partial x^{l_s}}(\tilde{\tilde{p}}) \end{aligned}$$

wobei $\tilde{p} = \psi(p)$, und $\tilde{\tilde{p}} = \phi(p)$. Das sieht man, durch $\psi u_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = u(\psi \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p), \dots, \psi \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}(p), \psi dx^{j_1} \dots \psi dx^{j_s})$ und einsetzen in der ersten Formel, und anwenden den folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \phi dx^i(p) (\psi \frac{\partial}{\partial x^k}(p)) &= \phi dx^i(p) (\frac{\partial(\phi^r \circ \psi^{-1})}{\partial x^k}(\tilde{p}) \phi \frac{\partial}{\partial x^r}(p)) \\ &= \frac{\partial(\phi^i \circ \psi^{-1})}{\partial x^k}(\tilde{p}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

und

$$\phi \frac{\partial}{\partial x^k}(p) (\psi dx^i(p)) = \frac{\partial(\psi^i \circ \phi^{-1})}{\partial x^k}(\tilde{\tilde{p}}) \quad (6.5)$$

(die Gleichungen 6.4 und 6.5 werden mit Hilfe des Lemmas 3.21 bewiesen). Wenn $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := \phi \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ und $\frac{\partial}{\partial y^i}(p) := \psi \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, dann liest diese Formel

$$\begin{aligned} & \psi u_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(p) = \\ & \phi u_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}(p) \frac{\partial \phi^{k_1}}{\partial y^{i_1}}(p) \frac{\partial \phi^{k_2}}{\partial y^{i_2}}(p) \dots \frac{\partial \phi^{k_r}}{\partial y^{i_r}}(\tilde{p}) \frac{\partial \psi^{j_1}}{\partial x^{l_1}}(p) \frac{\partial \psi^{j_2}}{\partial x^{l_2}}(p) \dots \frac{\partial \psi^{j_s}}{\partial x^{l_s}}(p) \end{aligned} \quad (6.6)$$

ACHTUNG: Hier haben wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt.

Proposition 6.13 *Zu der Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ auf M erhalten wir die induzierte Karte $\bar{\phi} : T_s^r(U) \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^N$, mit $N = n^{r+s}$ durch*

$$\bar{\phi}(u) = (\pi(u), (\phi u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s})(p)_{1 \leq i_\mu, j_\sigma \leq n,})$$

für

$$u = \phi u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \phi dx^{i_1}(p) \otimes \phi dx^{i_2}(p) \dots \phi dx^{i_r}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}(p) \otimes \phi \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}(p) \in T_s^r(U) \quad (6.7)$$

Völlig analog zu dem Fall des Tangentialbündels, (siehe Satz 3.25) kann man zeigen: es gibt eine eindeutig bestimmte Topologie, so dass die Karten $\bar{\phi}$ einen C^∞ Atlas von $T_s^r(TM)$ bilden (benutze Satz 1.39, und die Gleichung 6.3). Konvergenz bezüglich dieser Topologie ist wie folgt charakterisiert: $A_\alpha \rightarrow A \in T_s^r(M)$ mit $\alpha \rightarrow \infty \iff p_k = \pi(A_k) \rightarrow p = \pi(A)$ und

$$(A_\alpha(p_k))_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \rightarrow (A(p))_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s},$$

mit $\alpha \rightarrow \infty$ for all $1 \leq i_\mu, j_\sigma \leq n$. Auch analog zu dem Fall für TM gilt: ein $\binom{r}{s}$ Tensor $A : M \rightarrow T_s^r(M)$ ist genau dann C^k , wenn in Koordinaten die $A_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^k sind (für alle mögliche Karten).

$(T_s^r(M), M, \pi)$ ist ein Vektorbündel.

Definition 6.14 Seien (E, M) diff. Mannig, und $\pi \in C^\infty(E, M)$. (E, M, π) heißt diff. Vektorbündel vom rank k über M , falls gilt:

- Für alle $p \in M$ trägt $E_p = \pi^{-1}(p)$ (die sog. Faser über p) die Struktur eines k -dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraums.
- Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeo. der Form

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \quad \psi(v) = (\pi(v), H(v)),$$

wobei $H : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ faserweise Linear ist, d.h. für alle $q \in U$ gilt $H(q) := H|_{E_q} : E_q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

7 Formen

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Auf dem Raum $\mathcal{T}_0^k(V)$, der $\binom{k}{0}$ – Tensoren operiert die Symmetrische Gruppe S_k von rechts durch

$$\omega\sigma(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Sei $\sigma, \tau \in S_k$. Setze $w_1 = v_{\tau(1)}, w_2 = v_{\tau(2)}, \dots, w_k = v_{\tau(k)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((\omega\sigma)\tau)(v_1, \dots, v_k) &= (\omega\sigma)(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \dots, v_{\tau(k)}) \\ &= (\omega\sigma)(w_1, \dots, w_k) = \omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \dots, w_{\sigma(k)}) \\ &= \omega(v_{\tau(\sigma(1))}, v_{\tau(\sigma(2))}, \dots, v_{\tau(\sigma(k))}) \\ &= (\omega(\tau \circ \sigma))(v_1, \dots, v_k) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Also: Vorsicht! $((\omega\sigma)\tau) = (\omega(\tau \circ \sigma))$ (NICHT $(\omega(\sigma \circ \tau))$).

Definition 7.1 $\omega \in \mathcal{T}_0^k(V)$ heißt alternierend, wenn $\omega\sigma = (\text{sign } \sigma)\omega$ für alle $\sigma \in S_k$. $\Lambda^k(V) = \{\omega \in \mathcal{T}_0^k(V) | \omega \text{ alternierend ist}\}$. Wir sagen ω ist ein k -Form auf V .

Definition 7.2 Der Alternator $\text{Alt} : \mathcal{T}_0^k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$ ist

$$\text{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)(\omega\sigma).$$

Beachte dabei:

•

$$\begin{aligned} (\text{Alt}(\omega))\tau &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)(\omega\sigma)\tau \\ &= (\text{sign } \tau) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \tau\sigma)(\omega(\tau\sigma)) \\ &= (\text{sign } \tau)(\text{Alt}(\omega)). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Das heisst, $\text{Alt}(\omega)$ ist tatsächlich in $\Lambda^k(V)$.

- $\omega \in \Lambda^k(V)$ impliziert,

$$\text{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)(\omega\sigma) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)^2(\omega) = \omega.$$

Definition 7.3 Das äußere Produkt (Dachprodukt) von zwei Formen $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\eta \in \Lambda^l(V)$ ist

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Lemma 7.4 Es gilt:

1. $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \psi = \lambda(\omega \wedge \psi) + \mu(\eta \wedge \psi).$
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ für $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\eta \in \Lambda^l(V).$
3. $(\omega \wedge \eta) \wedge \psi = \omega \wedge (\eta \wedge \psi) = \frac{(k+l+s)!}{k!l!s!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \psi)$
4. Falls $\text{Alt}(\eta) = 0$, dann gilt $\text{Alt}(\omega \otimes \eta) = \text{Alt}(\eta \otimes \omega) = 0$

Beweis: von (4): Annahme $\text{Alt}(\eta) = 0$. Sei G die Untergruppe von S_{k+l} durch $G = \{\sigma \in S_{k+l} | \sigma(k+1) = k+1, \sigma(k+2) = k+2, \dots, \sigma(k+l) = k+l\}$ definiert (also die Untergruppe von S_{k+l} , welche elementen die letzte l Indices festhalten). Für $\alpha \in S_{k+l}$, sei $[\alpha] = \{\beta \in S_{k+l} | \beta = \alpha \circ g \text{ für ein } g \in G\}$. Es gilt für alle $\alpha, \beta \in S_{k+l}$, $[\alpha] = [\beta]$ oder $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$ ($\alpha \circ h = \beta \circ g$ impliziert $\alpha = \beta \circ g \circ h^{-1}$ impliziert $[\alpha] = [\beta]$, $\alpha \circ h \neq \beta \circ g$ für alle $g, h \in G$ impliziert $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$). Also $S_{k+l} = [\alpha_1] \cup \dots \cup [\alpha_N]$ für endliche viele disjunkte $[\alpha_i]$.

$$\begin{aligned} k!l!(\eta \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sign } \sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in [\alpha_1]} () + \sum_{\sigma \in [\alpha_2]} () + \dots + \sum_{\sigma \in [\alpha_N]} () \end{aligned} \quad (7.3)$$

Die erste Summe ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in [\alpha_1]} (\text{sign } \sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{h \in G} (\text{sign } (\alpha_1 \circ h)) \eta(v_{\alpha_1 \circ h(1)}, \dots, v_{\alpha_1 \circ h(k)}) \omega(v_{\alpha_1 \circ h(k+1)}, \dots, v_{\alpha_1 \circ h(k+l)}) \\ &= \sum_{h \in G} \text{sign } (\alpha_1) \text{sign } (h) (\eta h)(v_{\alpha_1(1)}, \dots, v_{\alpha_1(k)}) \omega(v_{\alpha_1(k+1)}, \dots, v_{\alpha_1(k+l)}) \\ &= \text{sign } (\alpha_1) \omega(v_{\alpha_1(k+1)}, \dots, v_{\alpha_1(k+l)}) \sum_{h \in G} \text{sign } (h) (\eta h)(v_{\alpha_1(1)}, \dots, v_{\alpha_1(k)}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

da $\text{Alt}(\eta) = 0$. Ähnlicherweise, sind alle summen null. Also, $\text{Alt}(\eta \otimes \omega) = 0$. Ähnlich beweist man, dass $\text{Alt}(\omega \otimes \eta) = 0$.

Beweis von (3): da $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) = 0$ folgt für $\psi \in \Lambda - (V)$

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \psi - \omega \otimes \eta \otimes \psi) = 0$$

(ähnlich sieht man)

$$\text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \psi) - \omega \otimes \eta \otimes \psi) = 0$$

Für ω, η, ψ Formen (alternierend per Definition) bekommen wir

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \psi &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \psi) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \psi) \\ &= \omega \wedge (\eta \wedge \psi) \end{aligned} \quad (7.5)$$

wie erwünscht. Beweis von (1) folgt sofort von defn. und (2) leichter (Übungsaufgabe: folgt von der Defn von $\wedge$).

Lemma 7.5 Für $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt $(\omega^1 \wedge \omega^2 \dots \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$

Beweis:

$$(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k) = k! \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \dots \otimes \omega_k)$$

von oben. Definition von Alt und det liefert den Beweis.

Definition 7.6 $I(k, n)$ ist die Menge die aufsteigende Multi-Indices:

$$I(k, n) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) | 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n\}.$$

Satz 7.7 Sei V ein n -dim. Vektorraum mit Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Sei $\{e^1, \dots, e^n\}$ die duale Basis dazu. Sei $e^\alpha = e^{\alpha_1} \wedge e^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge e^{\alpha_k}$ für $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $1 \leq \alpha_k \leq n$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\{e^\alpha = e^{\alpha_1} \wedge e^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge e^{\alpha_k} | 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n\}$ eine Basis für $\Lambda^k(V)$. Jedes $\omega \in \Lambda^k(V)$ besitzt eine Darstellung:

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_\alpha e^\alpha \quad (7.6)$$

mit eindeutigen Koeffizienten ω_α , $\omega_\alpha = \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k})$. Die Dimension von $\Lambda^k(V)$ ist dadurch $(n_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Speziellfälle sind

- $\Lambda^1(V) = V^*$ hat die Basis $\{e^i | 1 \leq i \leq n\}$
- $\Lambda^{n-1}(V)$ hat die Basis $\{e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^{i-1} \wedge e^{i+1} \wedge \dots \wedge e^n\}$
- $\Lambda^n(V) \sim \mathbb{R}$, $\omega \rightarrow \omega(e_1, \dots, e_n)$.
- $\Lambda^0(V) \sim \mathbb{R}$ (Definition).

Beweis:

$$(e^{\alpha_1} \wedge e^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge e^{\alpha_k})(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k}) = \det(e^{\alpha_i}(e_{\beta_j})) = 0 \text{ falls } \alpha \neq \beta, = 1 \text{ falls } \alpha = \beta.$$

Daraus folgt

$$\omega(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k}) = \left(\sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_{\alpha} e^{\alpha} \right)(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k}) \quad (7.7)$$

für $\omega_{\alpha} := \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k})$. Also, $\omega = (\sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_{\alpha} e^{\alpha})$ durch Linearität.

(Eindeutigkeit, und Linear Unabhängigkeit): Angenommen $\omega = (\sum_{\alpha \in I(k, n)} c_{\alpha} e^{\alpha}) = 0$.

Dann gilt $c_{\alpha} = \omega(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k}) = 0$ für alle $\alpha \in I(k, n)$. $\square$

Definition 7.8 Sei M eine diff. mannig. Dann heißt $\Lambda^k(TM) = \cup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M)$ Bündel der k -Formen auf M . Eine k -Form auf M ist eine Abbildung $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(TM)$ mit $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)$ für alle $p \in M$.

Bemerkung 7.9 Falls $\dim(M^n) = n$ und $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte ist, dann hat eine k -Form ω die Darstellung

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_{\alpha} dx^{\alpha} = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n} \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\omega_{\alpha} = \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 7.10 Sei $f \in C^1(M, N)$ eine Abbildung zwischen Diff. mannig. M^m und N^n . Der **Pullback** der k -Form η auf N unter f ist folgende k -Form auf M :

$$f^*(\eta)(p)(X_1, \dots, X_k) := \eta(f(p))(Df(p)(X_1), \dots, Df(p)(X_k))$$

für alle $X_1, \dots, X_k \in T_p M$. Kurz geschrieben:

$$f^*(\eta)(X_1, \dots, X_k) := (\eta \circ f)(Df(X_1), \dots, Df(X_k))$$

für alle $X_1, \dots, X_k \in TM$ mit $\pi(X_1) = \dots \pi(X_k)$.

Lemma 7.11 Sei M^m, N^n diff. Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M^m, N^n)$.

•

$$f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = (\lambda \circ f)f^*\omega + (\mu \circ f)f^*\eta$$

für alle $\lambda, \mu : N \rightarrow \mathbb{R}$, ω k -Formen, η l -Formen auf N .

•

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega \wedge f^*\eta)$$

für alle k -Formen, η l -Formen auf N .

•

$$(g \circ f)^* = (f^*) \circ (g^*)$$

falls $f \in C^1(M, N)$ und $g \in C^1(N, P)$.

Beweis: ÜA (benutzen sie die Defn. von $*$ und $\wedge$).

Lemma 7.12 Sei $f \in C^1(M^m, N^n)$. Ist $\psi : V \rightarrow \psi(V), y = \psi(q)$ eine Karte auf N $f(U) \subset V$, so gilt $f^*dy^k|_U = df^k|_U$, wobei $f^k = \psi^k \circ f$.

Beweis: Sei $V \in T_p M$.

$$\begin{aligned} (f^*dy^k)(p)(V) &= dy^k(f(p))(Df(p)(V)) \\ &= (Df(p)(V))(\psi^k) \\ &= V(p)(\psi^k \circ f) \\ &= d(\psi^k \circ f)(p)(V) \end{aligned} \quad (7.8)$$

per definition von df für ein $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($df(p)(V) = V(f)$). $\square$.

Folgerung 7.13 Sei $f \in C^1(M^m, N^n)$. Sind $\phi : U \rightarrow \phi(U), x = \phi(p)$ sowie $\psi : V \rightarrow \psi(V), y = \psi(q)$ Karten auf M bzw. N mit $f(U) \subset V$, so gilt für eine k -Form $\eta = \sum_{\beta \in I(k,n)} \eta_\beta dy^{\beta^1} \wedge \dots \wedge dy^{\beta^k}$ auf N

$$\begin{aligned} f^*(\eta) &= \sum_{\beta \in I(k,n)} \eta_\beta \circ f df^{\beta^1} \wedge \dots \wedge df^{\beta^k} \\ &= \sum_{\beta \in I(k,n)} \sum_{\alpha \in I(k,m)} \det(\partial f_\alpha^\beta) \eta_\beta \circ f dx^{\alpha^1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha^k} \end{aligned} \quad (7.9)$$

wobei, für $p \in M$, $\alpha \in I(k, n)$ und $\beta \in I(k, m)$, $(\partial f_\alpha^\beta)$ die k mal k Matrix

$$(\partial f_\alpha^\beta)_{ij}(p) = \frac{\partial(\psi^{\beta_i} \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x^{\alpha_j}}(\phi(p))$$

ist ($i, j \in \{1, \dots, k\}$).

Beweis: Die erste Gleichung folgt von Lemma 7.12 und Lemma 7.11. Die Nächste folgt von 7.5. $\square$.

Satz 7.14 Es gibt genau eine Abbildung $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ mit folgenden Eigenschaften

- $d\Omega^k(M) \subset \Omega^{k+1}(M)$
- df stimmt mit der Defn. von vorher überein für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$: $df(p)(V) = V(f)$ für $V \in T_p M$.
- $d \circ d = 0$.
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k d\eta$ für $\omega \in \Omega^k(M)$ $\eta \in \Omega^l(M)$. Insbesondere gilt $d(f\eta) = df \wedge \eta + f d\eta$.
- d ist ein lokaler Operator, d.h. für $U \subset M$ offen gilt $d\omega|_U = d(\omega|_U)$.

Beweis: Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte. Die Eigenschaften oben implizieren trivialerweise, dass falls d existiert, dann muss d lokal so aussehen:

$$d\left(\sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in I(k,n)} d\omega_\alpha \wedge dx^\alpha.$$

Umgekehrt, wenn man d so lokal definiert (mit einer Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$), dann sieht man (durch direktes rechnen), dass (i) bis (iv) erfüllt sind. Weiterhin für eine Karte $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ mit $p \in U \cap V$ sieht man, dass die Definition in p gleich sind (unabhängig von den Koordinaten). Also, d ist glatt und überall auf M dadurch definiert. $\square$.

Bemerkung 7.15 d ist definiert für alle C^1 k -Formen. Die Identität $d^2\eta = 0$ erfordert, dass η C^2 ist.

Proposition 7.16 $f \in C^2(M, N)$ und η ein C^1 k -Form, dann gilt:

$$d(f^*(\eta)) = f^*(d\eta).$$

Beweis: rechnen in lokalen Koordinaten. Von Lemma ???, wissen wir

$$\begin{aligned} d(f^*(\eta)) &= d\left(\sum_{\beta \in I(k,n)} \eta_\beta \circ f df^{\beta^1} \wedge \dots df^{\beta^k}\right) \\ &= \sum_{\beta \in I(k,n)} d(\eta_\beta \circ f) df^{\beta^1} \wedge \dots df^{\beta^k} \\ &= \sum_{\beta \in I(k,n)} f^*(d(\eta_\beta)) f^*(dy^{\beta^1}) \wedge \dots f^*(dy^{\beta^k}) \\ &= f^*\left(\sum_{\beta \in I(k,n)} d(\eta_\beta) dy^{\beta^1} \wedge \dots dy^{\beta^k}\right) \\ &= f^*(d\eta) \end{aligned} \tag{7.10}$$

wie erwünscht.

Definition 7.17 $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) | d\omega = 0\}$ sind die sog. geschlossene k -Formen. $B^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) | \omega = d\eta \text{ für ein } \eta \in \Omega^{k-1}(M)\}$ sind die sog. exakten k -Formen. Es gilt $B^k(M) \subset Z^k(M)$ und beide sind $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Der Quotientenraum $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ heißt der de-Rham Kohomologieraum von M . $b_k(M) = \dim(H^k(M))$ ist der k -te Betti-Nummer. $\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(M)$ ist der Euler-Charakteristik von M . Für M kompakt, sind die Räume $H^k(M)$ endlich dimensional, und dann ist alles wohldefiniert.

Definition 7.18 $f \in C^\infty(M, N)$ induziert eine Abbildung $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ (auch Pullback genannt) durch

$$f^*([\omega]) = [f^*\omega].$$

f^* ist wohldefiniert, da:

- $\omega \in H^k(N)$ impliziert, dass $d\omega = 0$ impliziert, dass $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$.
- $[f^*(\omega + d\eta)] = [f^*(\omega) + d(f^*\eta)] = [f^*(\omega)]$.

Definition 7.19 Für eine k -Form ω , und ein Vfeld. X auf M ,

$X \lrcorner \omega$ ist die $k-1$ Form $X \lrcorner \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$

Sei $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte auf M . $\frac{\partial}{\partial x^j}$ angewandt auf einer k -Form $\sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha$ (auf U) ist die k -Form (nur auf U definiert)

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha \right) := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^j} dx^\alpha$$

. Diese definition hängt von den Koordinaten ab.

Lemma von Poincare'

Betrachte auf $(a, b) \times M$ das Vfeld. $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}(s, p)(f) := \frac{\partial f}{\partial t}(s, p)$, für alle $f : (a, b) \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Form $\eta \in \Omega^k((a, b) \times M)$ hat die Darstellung $\eta(t, p) = dt(t, p) \wedge \alpha(t, p) + \beta(t, p)$ wobei $\alpha \in \Omega^{k-1}((a, b) \times M)$ $\beta \in \Omega^k((a, b) \times M)$, und $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \alpha = 0, \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \beta = 0$: setze dazu $\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta$ und $\beta = \eta - dt \wedge \alpha$. $\eta(t, p) = dt(t, p) \wedge \alpha(t, p) + \beta(t, p)$ folgt sofort von der Definition von β . $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \alpha = \eta(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}, \dots, \cdot) = 0$ (erste gleichheit folgt von der DEfn von α). $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \beta = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta - \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner dt \wedge \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta - \alpha = 0$ wobei die erste Gleichheit folgt von der Defn. von β und die letzte Gl. folgt von der DEfn. von $\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta$. Sei $d_x = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}$ die äußere Ableitung in der $p \in M$ Richtung, und $d_t = dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}$ die in der t Richtung. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} d\eta &= (d_x + d_t)(dt \wedge \alpha + \beta) \\ &= dx^j \wedge dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x^j}(t, p) + d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= -dt \wedge d_x \alpha + d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

und das impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d\eta &= -d_x \alpha + \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (dx^j \wedge \frac{\partial \beta}{\partial x^j}) + \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= -d_x \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial t} \end{aligned} \tag{7.12}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta = \alpha$ (defn. von α) und so

$$\begin{aligned} d \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \eta &= d\alpha \\ &= dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} + d_x \alpha \end{aligned} \tag{7.13}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \lfloor d\eta + d\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta &= \frac{\partial \beta}{\partial t} + dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\beta + dt \wedge \alpha) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\eta).
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Sei nun $i_t : M \rightarrow (a, b) \times M$ $i_t(p) = (t, p)$. Wir nehmen an, dass $[0, 1] \subset (a, b)$. Definiere die Abbildung $I : \Omega^k((a, b) \times M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ durch

$$I(\eta)(p)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \int_0^1 \eta(t, p) \left(\frac{\partial}{\partial t}(t, p), Di_t(p)(X_1), \dots, Di_t(p)(X_{k-1}) \right) dt,$$

für alle $X_1, \dots, X_{k-1} \in T_p M$. Dies können wir auch in dem Form

$$I(\eta)(p)(\cdot, \dots, \cdot) = \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta \right) (\cdot, \dots, \cdot) dt$$

schreiben. Mit Paramaterdifferentiation berechnen wir

$$\begin{aligned}
dI(\eta) &= dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta \right) \\
&= \int_0^1 dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} (i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta \right)) \\
&= \int_0^1 d(i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta \right)) dt \\
&= \int_0^1 i_t^* (d \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor \eta \right)) dt,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

und

$$Id(\eta) = \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \rfloor d\eta \right) dt. \tag{7.16}$$

Die Gleichungen implizieren, dass

$$dI(\eta) + Id(\eta) = \int_0^1 i_t^* \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dt. \quad (*)$$

Aber, $i_t^* \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (i_t^* \eta)(t)$ wie man leicht sieht, wenn man in koordinaten $\tilde{\phi} : (a, b) \times U \rightarrow \tilde{\phi}((a, b) \times U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rechnet, wobei $\tilde{\phi}(s, p) = (s, \phi(p))$ und $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ Koordinaten für M sind. Aber das impliziert:

$$dI(\eta) + Id(\eta) = i_1^*(\eta) - i_0^*(\eta). \tag{7.17}$$

Lemma 7.20 Lemma von Poincare'

Sei $f \in C^\infty((a, b) \times M^m, N^n)$. Dann gilt für $\omega \in \Omega^k(N)$ mit $f_t(p) = f(t, p)$,

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = d(I(f^*\omega)) + I(f^*(d\omega)).$$

Beweis: Wende obige Formel (7.17) an $\eta = f^*(\omega)$ an und benutze

$$i_t^*(\eta) = i_t^*(f^*(\omega)) = (f \circ i_t)^*(\omega) = (f_t)^*(\omega).$$

□

Folgerung 7.21 Falls $f_0, f_1 \in C^\infty(M, N)$ zueinander glatt homotop sind, so sind die induzierten Abbildungen $f_0^*, f_1^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ gleich

(f_0 ist glatt homotop zu f_1 wenn es existiert $f \in C^\infty((a, b) \times M, N)$ mit $f(0, \cdot) = f_0(\cdot), f(1, \cdot) = f_1(\cdot)$).

Beweis:

Sei $\omega \in Z^k(M)$. Dann folgt $[f_1^*(\omega)] = [f_0^*(\omega) + d(I(f^*(\omega))) + I(f^*(d\omega))] = [f_0^*(\omega)]$.

□

Folgerung 7.22 Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, offen, so gilt $H^k(U) = \mathbb{R}$ für $k = 0$ sonst $H^k(U) = \{0\}$.

Beweis: Definiere $s(t) = (1 - t^2)^2, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. s ist glatt., $s((-\sqrt{2}, \sqrt{2})) \subset [0, 1]$ und $s(0) = 1, s(1) = 0$. Definiere: $f : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \times U \rightarrow U$ durch $f(t, x) = s(t)x + (1 - s(t))x$. Es gilt $f(0, x) = x_0, f(1, x) = x$, also $f(1, \cdot) = Id$. Lemma von Poincaré impliziert $[\omega] = [f_1^*\omega] = [f_0^*\omega] = [0]$. □

Für die Defn. des Integrals einer n -Form auf einer n -dim. Mannig., brauchen wir den Begriff der Orientierung

Definition 7.23 Zwei geordnete Basen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ heißen gleichorientiert (Notation $A \sim B$), falls $\det T_{AB} > 0$. Dabei ist $T_{AB} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Transformationsmatrix $b_i = (T_{AB})_i^j a_j$. Es gilt für Basen A, B, C $T_{AA} = Id, T_{BA} = (T_{AB})^{-1}, T_{AC} = T_{AB}T_{BC}$. Also, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Klassen. Ist σ eine der beiden Klassen, so nennen wir σ eine Orientierung von V und (V, σ) heißt orientiert. Eine Basis A heißt dann positiv orientiert (bzw. negativ orientiert), wenn $A \in \sigma$ (bzw. $A \notin \sigma$). Ein Isomorphismus $L : V \rightarrow W$ zwischen Vektorräume V, W mit Orientierungen σ bzw. τ (geschrieben $L : (V, \sigma) \rightarrow (W, \tau)$) heißt Orientierungstreu (bzw. untreu), falls gilt $\{v_1, \dots, v_n\} \in \sigma \implies \{Lv_1, \dots, Lv_n\} \in \tau$. Insbesondere gilt für $L \in GL(V)$, $L : (V, \sigma) \rightarrow (V, \sigma)$ ist Orientierungstreu genau dann, wenn $\det(L) > 0$.

Definition 7.24 Sei M^n diff. Mannig. der Dimension n . Eine Orientierung von M ist eine Abbildung σ , die jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung $\sigma(p)$ von $T_p M$ zuordnet, so dass gilt: es gibt einen Atlas $\mathcal{A}$ von M , so dass für jede Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $x = \phi(p)$, in $\mathcal{A}$ gilt: $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\} \in \sigma(p)$ für alle $p \in U$. Existiert eine solche Orientierung, so heißt M orientierbar.

Proposition 7.25 M ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas von M gibt, so dass alle Kartenwechsel positiv Jacobideterminante haben.

Beweis:

Ist $\mathcal{A}$ der Atlas aus Def. 7.23, mit Orientierung σ , und $\mathbb{R}^n$ ist mit der Standard Orientierung α versehen ($\alpha = [\{e_1, \dots, e_n\}]$), dann haben wir für Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ $x = \phi(p), y = \psi(p)$ in $\mathcal{A}$, $p \in U \cap V$, $L : (\mathbb{R}^n, \alpha) \rightarrow (T_p M, \sigma(p))$, $L(a^i e_i) = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ ist Orientierungstreu, und $S : (T_p M, \sigma(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \alpha)$ $S(b^i \frac{\partial}{\partial y^i}(p)) = b^i e_i$ ist orientierungstreu, und so $S \circ L : (\mathbb{R}^n, \alpha) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \alpha)$ $S \circ L = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))$ (Die Jacobimatrix) ist orientierungstreu, d.h. (per Defn.) $\det(D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))) > 0$. Umgekehrt: Falls $\det(D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))) > 0$ für alle Karten in einem Atlas $\mathcal{A}$ gilt, dann definiere $\sigma(p) = [\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}]$. Dies ist wohldefiniert, da der Transformationsmatrix T von $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ zu $\{\frac{\partial}{\partial y^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(p)\}$ (Basis Vektoren von den Karten ϕ bzw. ψ) ist $D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))$, und $\det D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) > 0$. $\square$

Proposition 7.26 *Ist M zusammenhängend und orientierbar, so gibt es genau zwei Orientierungen von M .*

Beweis:

Seien σ, τ Orientierungen von M . Sei $A = \{p \in M | \sigma(p) = \tau(p)\}$. Wir zeigen, dass A offen und abgeschlossen ist. Damit ist $A = M$ oder $A^c = M$.

Offen: Für $p \in A$ wähle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ sowie $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ $x = \phi(p), y = \psi(p)$ $p \in U \cap V$ und $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\} \in \sigma(p)$ für alle $p \in U$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(p)\} \in \tau(p)$ für alle $p \in V$. Es gilt $\det(D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p))) > 0$, da $\sigma(p) = \tau(p)$ und die Transformationsmatrix zwischen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(p)\}$ ist $D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p))$. Also gilt $\det(D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(q))) > 0$ für alle q in eine kleine Umgebung von p . Also A ist offen. Analog zeigt man, dass A abgeschlossen ist.

Seien σ, τ Orientierungen mit $\sigma \neq \tau$. Sei $p \in M$ beliebig. Für eine dritte Orientierung α muss $\alpha(p) = \sigma(p)$ oder $\alpha(p) = \tau(p)$. Im Fall 1, gilt $\alpha = \sigma$ auf M (wie oben gezeigt worden ist), und $\alpha(q) \neq \tau(q)$ für alle $q \in M$ (wie oben gezeigt worden ist). Fall 2 ist analog behandelt. $\square$.

Definition 7.27 *Sei (N, τ) orientierte Mannig., und $f : M \rightarrow N$ lokaler Diffeo. Dann ist $f^* \tau$ die Orientierung die so definiert ist: $\{v_1, \dots, v_n\} \in f^*(\tau(p)) \iff \{Df(p)(v_1), \dots, Df(p)(v_n)\} \in \tau(p)$.*

Check: Ist $f^* \tau(p)$ wohl definiert? Falls $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis mit $[\{w_1, \dots, w_n\}] = [\{v_1, \dots, v_n\}]$ ist (d.h. $w_i = A_i^j v_j$ mit $\det(A) > 0$), und $\{Df(p)(v_1), \dots, Df(p)(v_n)\} \in \tau(f(p))$ ist, dann ist $\{Df(p)(w_1), \dots, Df(p)(w_n)\} \in \tau(f(p))$, da $Df(p)(w_i) = A_i^j Df(p)(v_j)$. Also $f^* \tau(p)$ ist eine wohldefinierte Orientierung. Check: Ist $f^* \tau$ eine Orientierung?

Sei $p \in U$ und $f(U) \subset V$ mit $f|_U : U \rightarrow f(U)$ diffeomorph, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ eine Karte $y = \psi(f(p))$ wie in Defn. 7.24. Dann ist $\phi = \psi \circ f : U \rightarrow \psi(f(U))$ eine Karte für M mit $x = \phi(p)$, und es gilt:

$$\{Df(p)(\frac{\partial}{\partial x^1}(p)), \dots, Df(p)(\frac{\partial}{\partial x^n}(p))\} = \{\frac{\partial}{\partial y^1}(f(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(f(p))\} \in \tau(f(p)) \in \tau(f(p))$$

für alle $q \in U$. Dies impliziert (defn. von $f^*(\tau)$), dass

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(q) \right\} \in f^*(\tau)(q)$$

für alle $q \in U$. Die Menge von solchen Karten ϕ gibt uns einen Atlas $\mathcal{A}$ wie in Definition 7.24. Also $f^*(\tau)$ mit $\mathcal{A}$ ist eine Orientierung für M .

Definition 7.28 Ein lokaler Diffeo, $f : (M, \sigma) \rightarrow (N, \tau)$ heißt *orientierungstreu* (bzw. *orientierungsuntreu*), falls $f^*\tau = \sigma$ (bzw. $f^*\tau \neq \sigma$).

Definition 7.29 Die Gruppe $\Gamma \subset \text{Diff}(N)$ operiere frei und eig. diskontinuierlich auf N . Dann sind äquivalent:

(i) $M = N/\Gamma$ ist orientierbar.

(ii) N ist orientierbar und Γ operiert orientierungstreu bezüglich eine Orientierung von N .

Beweis: ((i) $\implies$ (ii)). Sei τ Orientierung von $M = N/\Gamma$. $\pi : N \rightarrow N/\Gamma$ ist ein lokaler diffeo. Dies impliziert, dass $\pi^*(\tau)$ ist eine Orientierung auf N . Für $g \in \Gamma$ gilt: $\pi \circ g = \pi$, also folgt $\pi^*(\tau) = (\pi \circ g)^*(\tau) = g^*(\pi^*(\tau))$. Das impliziert Γ operiert orientierungstreu auf N bezüglich der Orientierung $\pi^*(\tau)$. (Bemerkung: für $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$ lokale Diffeos, gilt: $(g \circ f)^*\tau = (f^* \circ g^*)(\tau)$ wie man leicht von der Defn. von $f^*(\tau)$ sieht.)

((ii) $\implies$ (i)): Definiere τ auf N/Γ wie folgt: $\tau(\pi(p)) = [\{D\pi(p)(v_1), \dots, D\pi(p)(v_n)\}]$ wobei $\{v_1, \dots, v_n\}$ in $\sigma(p)$ ist. Check: $\tau(\pi(p))$ hängt nicht von der Wahl von $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ ab, und nicht von der Wahl der Basis. Nicht anhängig von der Wahl der Basis folgt genau wie in 7.27. Weiterhin, für $p' = g(p)$, $g \in \Gamma$ gilt:

$$\begin{aligned} [\{D\pi(p')(v_1), \dots, D\pi(p')(v_n)\}] &= [\{D(\pi \circ g)(p)D(g^{-1})(p')(v_1), \dots, D(\pi \circ g)(p)D(g^{-1})(p')(v_n)\}] \\ &= [\{D\pi(p)(w_1), \dots, D\pi(p)(w_n)\}] \end{aligned} \quad (7.)$$

wobei $\{w_1, \dots, w_n\} \in \sigma(p)$, da g^{-1} orientierungstreu ist.

Also, $\tau(\pi(p)) = \tau(\pi(p'))$ ist wohldefiniert. Z.z. ist: τ ist eine Orientierung. Sei nun $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $x = \phi(p)$ eine +ve orientiert Karte von N (d.h. $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(q)\} \in \sigma(q)$ für alle $q \in U$). Nach Verkleinerung von U ist $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ diffeomorph. Dann ist $\phi \circ (\pi|_U)^{-1}$ Karte von $M = N/\Gamma$ mit Basisfeldern $\{D\pi \frac{\partial}{\partial x^1}(q), \dots, D\pi \frac{\partial}{\partial x^n}(q)\} \in \tau(\pi(p))$ was noch zu zeigen war. $\square$

Beispiel 7.30 Falls M^n mit zwei Karten überdeckt werden kann, $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ und $U \cap V \neq \emptyset$ zusammenhängend ist, dann ist M orientierbar.

Beweis: Sei $x \in U \cap V$. Falls $\det D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) > 0$ dann ist $\det D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(y)) > 0$ für alle $y \in U \cap V$ (Stetigkeit + wegzusammenhängend + $\det D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(y)) \neq 0$). Falls $\det D(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) < 0$, dann setze $\tilde{\phi} : U \rightarrow \tilde{\phi}(U)$, $\tilde{\phi}(p) = (-\phi^1(p), \phi^2(p), \dots, \phi^n(p))$. $\tilde{\phi}$ ist eine Karte, und es gilt $\det D(\tilde{\phi} \circ \psi^{-1})(\psi(x)) > 0$. Also ist $\det D(\tilde{\phi} \circ \psi^{-1})(\psi(y)) > 0$ für alle $y \in U \cap V$ (Stetigkeit + wegzusammenhängend + $\det D(\tilde{\phi} \circ \psi^{-1})(\psi(y)) \neq 0$). $\square$.

Satz 7.31 Für eine diff. Mannig. M^n der Dimension n sind äquivalent:

(i) M ist orientierbar.

(ii) Es gibt eine Form $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.

Beweis: (ii) impliziert (i): Definiere Orientierung σ auf M durch $\{v_1, \dots, v_n\} \in \sigma(p) \iff \omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0$. Wohldefiniert? Ja: $w_j = A_j^i v_i$ mit $\det(A) > 0$ impliziert

$$\omega(p)(w_1, \dots, w_n) = \omega(p)(v_1, \dots, v_n) \det(A) > 0.$$

Jetzt zeigen wir, dass σ wirklich eine Orientierung ist (d.h. wir müssen ein Atlas $\mathcal{A}$ finden, so dass $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\} \in \sigma(p)$ für alle Karten in $\mathcal{A}$). Ist $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine Karte mit U zusammenhängend, so gilt: $\omega = \phi^* f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ für eine Funktion $\phi^* f : U \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\phi^* f \neq 0$. D.h. $\phi^* f > 0$ oder $\phi^* f < 0$ auf U . Falls $\phi^* f > 0$ dann heisst ϕ 'gut'. Falls $\phi^* f < 0$, dann setze $\tilde{\phi} = (-\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n)$. Dann ist $\tilde{\phi}$ gut. Es folgt: $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)) = \phi^* f(p) > 0$ für $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ gut, für alle $p \in U$. D.h. $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\} \in \sigma(p)$ für Basisvektoren der Karte ϕ , falls ϕ gut ist. Die Menge von ϕ , so dass ϕ gut ist, ist der gesuchte Atlas.

(i) $\implies$ (ii): Um (i) $\implies$ (ii) zu beweisen, brauchen wir ein technisches Hilfsmittel, eine sog. Teilung der Eins.

Definition 7.32 Eine (glatte) Teilung der Eins auf M ist eine Familie $\{\eta_i | i \in I\}$ von (glatte) C^0 Funktionen $\eta_i : M \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes $p \in M$ hat eine Umgebung U , so dass $\{i \in I | \text{spt}(\eta_i) \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist. ($\text{spt}(f) = \text{cl}\{x : f(x) \neq 0\}$ wobei $\text{cl}(A)$ der Abschluss von A ist).

•

$$\sum_{i \in I} \eta_i(p) = 1$$

für alle $p \in M$ (nur endlich viele der Summanden sind nicht null: also, die Summe ist wohldefiniert).

- Eine Teilung der Eins $\{\eta_i | i \in I\}$ heißt untergeordnet zu der offenen Überdeckung $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ falls, für alle $i \in I$, es existiert ein $\lambda \in \Lambda$, so dass $\text{spt}(\eta_i) \subset U_\lambda$.

Satz 7.33 Sei M eine diff. Mannig., und $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine glatte Teilung der Eins $\{\eta_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ (gleiche Index Menge) untergeordnet zu $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$.

Beweis: (Mengen Theoretische Beweis) Siehe Lee, Thm. 2.25

Beweis von (i) $\implies$ (ii) (fortsetzung).

Wähle einem orientierten Atlas $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \phi_\lambda(U_\lambda)$. Sei nun $\{\eta_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ eine untergeordnete Teilung der Eins. Definiere $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \omega^\lambda$ wobei $\omega^\lambda = d\phi_\lambda^1 \wedge \dots \wedge d\phi_\lambda^n$. ω ist eine glatte n -Form. Man checkt durch einsetzen von koordinaten basis vektoren, dass $\omega \neq 0$ ist.

Satz 7.34 Transformationssatz Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\Phi \in C^1(U, V)$ Diffeo, Dann gilt für $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$ Messbar

$$\int_U (f \circ \Phi)(x) |\det D\Phi(x)| d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\phi(U)=V} f(y) d\mathcal{L}^n(y),$$

sobald eines der Integrale existiert.

Definition 7.35 Sei M^n diff. Mannig.

- $A \subset M$ Messbar $\iff \phi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{L}^n$ messbar für alle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$.
- $A \subset M$ Nullmenge $\iff \phi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge für alle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$.
- Eine k -Form ω ist messbar $\iff \omega_\alpha \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar für alle Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, und alle $\alpha \in I(k, n)$ wobei hier $\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_\alpha dx^\alpha$.

Proposition 7.36 Es genügt jeweils, diese Eigenschaften für einen (höchstens) abzählbaren Atlas von M nachzuprüfen.

Beweis: Z.b. (i) Angenommen $\phi_i(A \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{L}^n$ messbar, für alle $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \in \mathcal{A}$ ($i \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\phi(A \cap U) = \cup_{i=1}^\infty (\phi \circ (\phi_i)^{-1})(\phi_i(A \cap U \cap U_i)).$$

$\phi \circ (\phi_i)^{-1}$ sind lokal Lipschitz, also ist $(\phi \circ (\phi_i)^{-1})(\phi_i(A \cap U \cap U_i))$ $\mathcal{L}^n$ messbar, und damit $\phi(A \cap U)$ $\mathcal{L}^n$ messbar.

Die anderen Aussagen werden so ähnlich bewiesen. $\square$.

Definition 7.37 Eine messbare Zerlegung von M ist eine abzählbare Familie von Mengen $E_i \subset M, i \in I$, so dass gilt:

- $E_i \cap E_j$ ist eine Nullmenge $\forall i \neq j$.
- $M \setminus (\cup_{i \in I} E_i)$ ist eine Nullmenge.

Bemerkung 7.38 Sei $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i), i \in \mathbb{N}$ eine abz. Atlas von M (ein solcher existiert immer, da wir abz. Basis für die Topologie haben). Dann ist durch $E_1 = U_1, E_2 = U_2 \setminus U_1, \dots, E_{i+1} = U_{i+1} \setminus (\cup_{j=1}^i U_j)$ eine messbare Zerlegung definiert, so dass E_i im Gebiet U_i der Karte ϕ_i enthalten ist.

Definition 7.39 Sei M^n orientierte Mannig. der Dimension n , und $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ eine orientierte Karte. Sei $\omega = \omega_\phi d\phi^1 \wedge \dots \wedge d\phi^n$ messbare n -Form auf U ($\omega_\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$), und $E \subset U$ messbar. Dann heißt ω integrierbar falls

$$\int_{\phi(E)} |\omega_\phi \circ (\phi^{-1})| < \infty.$$

In dem Fall definieren wir

$$\int_E \omega = \int_{\phi(E)} \omega_\phi \circ (\phi^{-1})(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Die defn. ist wohldefiniert. Sei $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ eine andere Karte, dann gilt auf $U \cap V$

$$\omega_\phi = \omega_\psi \cdot (\det DL) \circ \phi$$

mit $L = \psi \circ \phi^{-1}$, wegen Lemma 7.5. Aus der Transformationssatz folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\psi(E)} \omega_\psi \circ (\psi^{-1})(y) d\mathcal{L}^n(y) &= \int_{\phi(E)} \omega_\psi \circ (\psi^{-1}) \circ L(x) |det DL(x)| d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\phi(E)} \omega_\psi \circ \phi^{-1}(x) \det DL(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\phi(E)} \omega_\phi \circ \phi^{-1}(x) d\mathcal{L}^n(x) \end{aligned} \quad (7.19)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\det(L) > 0$ da die Karten von der Orientierung kommen.

Definition 7.40 Sei M eine n -dim orientierte Mannig. und $E_i, i \in I$ eine messbare Zerlegung von M , so dass $E_i \subset U_i$ für positiv orientierte Karten $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$. Eine messbare n -Form ω auf M heißt integrierbar, falls

$$\sum_{i \in I} \int_{\phi(E_i)} |\omega_{\phi_i} \circ (\phi_i)^{-1}(x)| d\mathcal{L}^n(x) < \infty.$$

In dem Fall, definieren wir

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{E_i} \omega.$$

Bemerkung 7.41 • Die defn. ist unabhängig von der Zerlegung.

- Falls $\eta_i, i \in I$ eine abzählbare Teilung der Eins auf M ist, dann gilt für jede integrierbare n -Form:

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \eta_i \omega$$

- Ist ω stetig mit kompakten Träger, dann ist ω integrierbar.
- Seien M^m, N^m orientierte Mannig. und $\Phi \in C^1(M, N)$ ein orientierungstreuer (bzw. untreuer) Diffeo. Ist ω integrierbar auf M , so ist $\Phi^*(\omega)$ integrierbar und es gilt:

$$\int_M \Phi^*(\omega) = \int_M \omega \text{ (bzw. } \int_M \Phi^*(\omega) = - \int_M \omega).$$

Definition 7.42

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^n | x^1 \leq 0\}.$$

$$\partial(H^n) = \{(0, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Definition 7.43 Ein Hausdorffraum mit abz. Umgebungsbasis heißt n -dim Mannig mit Rand, falls es ein C^0 Atlas $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset H^n$, $i \in I$ gibt mit $\phi(U_i)$ jeweils offen in H^n . M heisst differenzierbar, wenn der Atlas C^∞ Kartenwechsel hat.

C^∞ Kartenwechsel muss genauer erklärt werden.

Definition 7.44 Für $V \subset H^n$ offen, bezeichne $C^k(V, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: zu $x \in V$, $\exists$ eine Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$, und eine sog. Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_V = f$. Sind $\tilde{f}, \tilde{g}$ zwei solche Fortsetzungen, so folgt aus Stetigkeitsgründen $D^\alpha \tilde{f} = D^\alpha \tilde{g}$ für multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| \leq k$. Also ist $D^\alpha f(x) = D^\alpha \tilde{f}(x)$ wohldefiniert für $x \in \partial H^n$.

Definition 7.45 $p \in M$ heißt innerer Punkt falls $\exists$ Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset H^n$ mit $p \in U$ und $\phi(p) \notin \partial H^n$. $p \in M$ heißt Randpunkt falls $\exists \phi : U \rightarrow \phi(U) \subset H^n$ mit $p \in U$ und $\phi(p) \in \partial H^n$. Diese Punktypen sind wohldefiniert wegen des Gebietsinvarianz Satzes.

Definition 7.46 Offenbar ist $\text{int}(M) := \{p \in M | p \text{ ein innerer Punkt ist}\}$ eine n -dim.- Mannig. ohne Rand. $\partial M := M \setminus \text{int}(M)$ die Menge der Randpunkte ist eine $(n-1)$ dim. Mannig. ohne Rand. Die Karten sind $\tilde{\phi} : U \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ $\tilde{\phi}(x^1, \dots, x^{n-1}) = \phi(0, x^1, \dots, x^{n-1})$.

Definition 7.47 • $f \in C^k(M, \mathbb{R}) \iff f$ lokal C^k ist, im Sinne von Defn. 7.44.

- $f \in C^k(M^m, N^n) \iff f$ lokal C^k ist $\iff$ für $x \in M$ existieren Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset H^m$, $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset H^n$ mit $f(U) \subset V$ und $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow H^n \subset \mathbb{R}^n$ ist C^k .
- $T_p M := \{v | v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, v \text{ ist Linear, und } v \text{ erfüllt Leibniz regel.}\}$

Bemerkung 7.48 • Sei $p \in \partial M$. Dann ist $T_p M$ Isomorph zu $\{[\gamma] | \gamma \in C^1([0, 1), M), \text{ oder } \gamma \in C^1((-1, 0], M)\}$ wobei $[\gamma] = [\sigma] \iff \gamma(0) = \sigma(0) = p$ und $\phi \circ \gamma'(0) = \phi \circ \sigma'(0)$ für Karten ϕ . (+ definiert man in dem man $(\phi(p) = 0)$ $[\gamma] + [\sigma] =: [\alpha]$ definiert, wobei $\alpha \in C^1([0, 1), M)$ oder $\alpha \in C^1((-1, 0], M)$ eine Kurve ist mit $\phi \circ \alpha'(0) = \phi \circ \gamma'(0) + \phi \circ \sigma'(0)$).

- Sei $p \in \partial M$. Dann hat $T_p M$ die Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ für eine beliebige Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset H^n$, wobei $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}((f \circ \phi^{-1}))(\phi(p))$, wobei $(f \circ \phi^{-1}) : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fortsetzung von $(f \circ \phi^{-1}) : V \rightarrow \mathbb{R}$ im Sinne von Defn 7.44 ist. Falls $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_p M$ ist, und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nur C^1 ist, dann mit $v(f)$ meinen wir $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = v^i \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))$ welche für f nur C^1 wohldefiniert ist.

- Dadurch sind Tensoren auf M von Typ $\binom{r}{s}$ wohl definiert, wenn M eine Mannig. mit Rand ist.
- Ein Tensor T von typ $\binom{r}{s}$ ist C^k , falls die lokale Darstellung (für eine Karte $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$)

$$T = {}^\phi T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$$

erfüllt: $T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^k .

- Für $f \in C^1(M, N)$ ist $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ durch $Df(p)(v_p)(l) := v_p(l \circ f)$ definiert (wobei $v_p(l \circ f)$ ist wie oben definiert, falls f nur C^1 ist).
- $D\phi(p) : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ ist ein V.raum Iso.
- Integration von einer n -Form auf eine Mannig. M^n mit Rand ist genau wie vorher (für M ohne Rand) definiert: die einzige Unterschied ist, wir müssen mit Karten $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ($\phi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$) arbeiten, statt $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ($\phi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$).

Definition 7.49 $v_p \in T_p M, p \in \partial M$ heißt nach innen (aussen) weisend, falls $\langle D\phi(p)(v_p), e_1(p) \rangle < 0$ (> 0). Dies ist wohldefiniert (hängt nicht von der Karte ab). Ob M orientiert ist oder nicht, spielt keine Rolle bei dieser Defn.

Bemerkung 7.50 Sei M orientiert. Dann erhält ∂M wie folgt eine Orientierung: für $p \in \partial M$ ist $\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \in \sigma(p) \iff \{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ +ve Orientiert ist und v nach aussen weisst. Dies ist wohldefiniert. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas wobei die Determinante der Jacobimatrix allen Kartenwechsel +ve ist. Wir definieren der Atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ als die Menge von $\tilde{\phi}$, so dass $\phi \in \mathcal{A}$ ist, wobei $\tilde{\phi}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \phi(0, x_1, \dots, x_{n-1})$ (wie vorher). Dann ist ∂M Orientiert mit Orientierung σ und Atlas $\tilde{\mathcal{A}}$.

Satz 7.51 Satz von Stokes Sei M eine $n - \dim$, kompakte, orientierte Mannig. mit Rand ∂M , mit der induzierten Orientierung versehen. Dann gilt für $\omega \in \Omega^{n-1}(M^n)$

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega.$$

Genauer, soll $\int_{\partial M^n} i^* \omega$ auf die linke Seite stehen, wobei $i : \partial M \rightarrow M$ die Inklusion Funktion $\partial M \subset M$ ist.