Lösung der Klausur zur Differentialgeometrie I WS 07/08

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. $q : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ ist eine glatte Funktion mit Ableitung in $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

   $$Dq(x, y)(v, w) = 2\langle x, v\rangle - 2\langle y, w\rangle .$$

   Sei $c \neq 0$ und $M_c = q^{-1}(c)$, dann ist $Dq(x, y) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ surjektiv für alle $(x, y) \in M_c$. Denn für ein $a \in \mathbb{R}$ wähle $(v, w) := \frac{a}{2c}(x, y)$, dann gilt $Dq(x, y)(v, w) = a$. Nach Satz der Vorlesung ist $M_c = q^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ der Dimension $n + m - 1$, insbesondere ist M_c damit auch eine Mannigfaltigkeit.

2. $M_0 = q^{-1}(0)$ ist keine Mannigfaltigkeit: Da Dq eine nicht entartete Bilinearform ist, ist $Dq(x, y)$ surjektiv für alle $(x, y) \neq 0$. Damit ist $M_0 \setminus \{0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m} \setminus \{0\}$ mit $\dim(M_0 \setminus \{0\}) = n + m - 1$. Angenommen M_0 ist eine Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine Karte (φ, U) von M_0 mit $0 \in U$ und U zusammenhängend. Falls $n + m > 2$ besteht $U \setminus \{0\}$ aus 2 Zusammenhangskomponenten ($(x, y) \in U$ und $(-x, -y) \in U$ liegen in verschiedenen Komponenten), aber $\varphi(U) \setminus \varphi(0) \subset \mathbb{R}^{n+m-1}$ ist zusammenhängend da $n + m - 1 \geq 2$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\varphi : U \setminus \{0\} \to \varphi(U) \setminus \varphi(0) \subset \mathbb{R}^{n+m-1}$ ein Homeomorphismus ist, also ist M_0 keine Mannigfaltigkeit. Im Fall $n = m = 1$ besteht $U \setminus \{0\}$ aus 4 Zusammenhangskomponenten und $\varphi(U) \setminus \varphi(0) \subset \mathbb{R}$ aus 2 Zusammenhangskomponenten, was wiederum einen Widerspruch liefert. Somit ist M_0 keine Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Der $\mathbb{R}^3$ ist zusammen mit der Standardkarte $\psi = \mathrm{Id}$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit. Nach Satz der Vorlesung reicht es damit zu zeigen, dass

$$\det D(\psi \circ h \circ \psi^{-1})(\psi(p)) = \det Dh(p) > 0$$

für alle $h \in \Gamma$ und $p \in \mathbb{R}^3$. Für

$$h = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{folgt} \quad Dh(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\det Dh(p) = 1$ für alle $h \in \Gamma$ und $p \in \mathbb{R}^3$.
Aufgabe 3 (3 Punkte)
$\theta_{|U} = \sum \theta_i \mathrm{d}x^i$ in lokal Koordinaten. $\phi(Y) = \phi_i Y^i$ impliziert,

$$\begin{aligned} X(p)(\phi(Y)) = X(p)(\phi_i Y^i) \quad &= Y^i(p)X(p)(\phi_i) + \phi_i(p)X(p)(Y^i) \\ &= Y^i(p)X^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p) + \phi_i(p)X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p) \end{aligned}$$

und analog

$$Y(p)(\phi(X)) = Y(p)(\phi_i X^i) \quad = X^i(p)Y^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p) + \phi_i(p)Y^j(p)\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(p)$$

Die zwei implizieren, dass

$$X(p)(\phi(Y)) - Y(p)(\phi(X)) - \phi(p)([X,Y]) = Y^i(p)X^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p) - X^i(p)Y^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p). \quad (1)$$

Per Defn. gilt $d\phi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j)$, und diese Gleichung impliziert

$$d\phi(p)(v,w) = d\phi(p)(X(p), Y(p)) = Y^i(p)X^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p) - X^i(p)Y^j(p)\frac{\partial \phi_i}{\partial x^j}(p). \quad (2)$$

Also (1) = (2), wie erwünscht.

Aufgabe 4

Für $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ ist $p_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Sei o.B.d.A $p_4 > 0$. $\phi(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1, p_2, p_3)$ ist dann eine glatte Karte auf $U = \{p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3 | p_4 > 0\}$. Für diese Koordinaten ist,

$$X(p) = \sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

mit $X^i(p) = \frac{d}{dt}(\phi^i(c_p(t)))|_{t=0}$, d.h. $X^1(p) = -p_2$, $X^2(p) = p_1$, $X^3(p) = -p_4 \neq 0$, oder (anders geschrieben) $X^1 \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = -x_2$, $X^2 \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $X^3 \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \neq 0$ die alle C^∞ auf U sind. $X^3 \neq 0$ auf U impliziert $X \neq 0$ auf U.

Aufgabe 5

c_x ist Integralkurve von X mit Anfangswert $c_x(0) = x$, falls $c'(t) = X(c(t)) = -2c(t)$. Aus der Theorie gewöhnlicher DGL folgt sofort $c_x(t) = e^{-2t}x$, denn $c_x(0) = x$ und $c_x'(t) = -2e^{-2t}x = -2c_x(t)$. Insbesondere ist jede Integralkurve auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und X damit vollständig integrierbar, d.h. $M^X = M \times \mathbb{R}$.

Da Y ein radiales Vektorfeld ist, betrachten wir folgenden Ansatz für eine Integralkurve c_x von Y mit $c_x(0) = x$: $c_x(t) = f(t)x$ mit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(0) = 1$. Dann liefert

$$-\frac{x}{f(t)|x|^2} = -\frac{c_x(t)}{|c_x(t)|^2} = Y(c_x(t)) = c_x'(t) = f'(t)x$$

eine gewöhnliche DGL 1.Ordnung $-\frac{1}{|x|^2} = f(t) \cdot f'(t) = \frac{1}{2}(f^2(t))'$. Wegen $f(0) = 1$ erhalten wir $f(t) = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|^2}t}$. Zur Probe: es gilt $c_x(0) = x$ sowie

$$c_x'(t) = f'(t)x = -\frac{x}{|x|^2 f(t)} = -\frac{c_x(t)}{|c_x(t)|^2} = Y(c_x(t)).$$

Der maximales Definitionsbereich der Integralkurve c_x ist aber $I_x = (-\infty, \frac{|x|^2}{2})$, d.h. Y ist nicht vollständig integrierbar und es folgt

$$M^Y = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times I_x = \{(x,t) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} | \; t < |x|^2/2\}$$

Aufgabe 6

1. Bereits bekannt: $H^0(M)$ und $H^{2n}(M)$ sind nicht trivial. Weiterhin gilt $\int\limits_M \omega^n \neq 0$ da ω^n nirgens verschwindet. Aus $\mathrm{d}\omega = 0$ folgt $\mathrm{d}\omega^k = 0$ für alle k. Angenommen ω^k ist exakt, dann gibt es ein $\eta \in \Omega^{2k-1}(M)$ mit $\omega^k = \mathrm{d}\eta$. In diesem Fall ist auch

$$\omega^n = \omega^k \wedge \omega^{n-k} = (\mathrm{d}\eta) \wedge \omega^{n-k} = \mathrm{d}(\eta \wedge \omega^{n-k})$$

exakt, so dass Stokes einen Widerspruch zur Voraussetzung liefert:

$$0 = \int\limits_M \mathrm{d}(\eta \wedge \omega^{n-k}) = \int \omega^n \neq 0$$

Also ist ω^k geschlossen und nicht exakt für alle $k = 1..n$, d.h. $[\omega^k] \neq 0$ und $H^{2k}(M)$ ist nicht trivial für alle $k = 1...n$.

2. Die Projektionen $\pi_1 : S^2 \times S^2, (p,q) \mapsto p$ und $\pi_2 : S^2 \times S^2 \to S^2, (p,q) \mapsto q$ sind offensichtlich glatt. Sei θ eine nirgens verschwindende glatte 2-Form auf S^2 (existiert da S^2 orientierbar) dann gilt $\mathrm{d}\theta = 0$. Insbesondere sind $\pi_1^*(\theta)$ und $\pi_2^*(\theta)$ geschlossen auf $S^2 \times S^2$. Definiere $\omega := \pi_1^*(\theta) + \pi_2^*(\theta)$, dann ist ω eine geschlossene 2 Form auf $S^2 \times S^2$. Sei $\psi : W = U \times V \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^4$ eine Karte auf $S^2 \times S^2$ mit $z = \phi(p) \in W$ wobei $\psi(\alpha, \beta) = (\phi(\alpha), \eta(\beta))$, wobei $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^2$, $\eta : V \to \eta(V) \subset \mathbb{R}^2$ Karten auf S^2 sind, $x = \phi(\alpha_0)$, $y = \eta(\beta_0)$ und $p = (\alpha_0, \beta_0)$. Dann ist lokal $\theta \circ \phi^{-1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)dx^1 \wedge dx^2$ für ein f mit $f \neq 0$ und $\theta \circ \eta^{-1}(y_1, y_2) = \tilde{f}(y_1, y_2)dy^1 \wedge dy^2$ für ein $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \neq 0$ und damit ist $\omega \circ \psi^{-1}(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_1, z_2)dz^1 \wedge dz^2 + \tilde{f}(z_3, z_4)dz^3 \wedge dz^4$ und schliesslich

$$(\omega \wedge \omega) \circ \psi^{-1}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 2f(z_1, z_2)\tilde{f}(z_3, z_4)dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 \wedge dz^4 \neq 0.$$