**Arbeitsprogramm Lie-Gruppen** (freiwillige Abgabe)

Eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur heißt $n$-dimensionale Liegruppe, wenn die folgenden Abbildungen $C^\infty$ sind:

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh \quad \text{und} \quad G \to G,\ g \mapsto g^{-1}.$$

Wir bezeichnen das neutrale Element der Liegruppe mit $e$.

**Aufgabe 1:** Verifizieren Sie einige der folgenden Beispiele:

- $(\mathbb{R}^n, +)$ ist $n$-dimensionale Liegruppe.
- $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist $n$-dimensionale Liegruppe.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist Liegruppe der Dimension $n^2$.
- $\mathrm{SO}_n$ ist Liegruppe der Dimension $n(n-1)/2$.
- $\mathrm{U}_n$ ist (reelle!) Liegruppe der Dimension $n^2$.
- $\mathrm{SU}_2 \cong \mathbb{S}^3$ ist dreidimensionale Liegruppe.

**Aufgabe 2:** Überlegen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Links- und Rechtstranslationen

$$l_g : G \to G,\ l_g(h) = gh \quad \text{und} \quad r_g : G \to G,\ r_g(h) = hg$$

Diffeomorphismen von $G$ sind, ebenso die Konjugation

$$c_g = l_g \circ r_{g^{-1}} = r_{g^{-1}} \circ l_g : G \to G,\ c_g(h) = ghg^{-1}.$$

**Definition.** Ein Vektorfeld $X \in C^\infty(TG)$ heißt linksinvariant, wenn gilt:

$$Dl_g \cdot X = X \circ l_g \quad \text{für alle } g \in G.$$

Wir bezeichnen den Raum der linksinvarianten Vektorfelder mit $LG$.

Wir erinnern an folgenden Begriff aus Differentialgeometrie I, Lemma 4.9: das Vektorfeld $X \in C^\infty(M)$ heißt $f$-verwandt zum Vektorfeld $\widetilde{X} \in C^\infty(\widetilde{M})$, wobei $f : M \to \widetilde{M}$, wenn $Df \cdot X = \widetilde{X} \circ f$. Weiter wurde dort gezeigt: sind $X, Y$ $F$-verwandt zu $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$, so ist auch $[X,Y]$ $F$-verwandt zu $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.

**Aufgabe 3:** Folgern Sie die Implikation

$$X, Y \text{ linksinvariant} \quad \Rightarrow \quad [X,Y] \text{ linksinvariant}$$

Der Raum $LG$ der linksinvarianten Felder auf $G$ bildet also eine Unter-Liealgebra der Liealgebra $C^\infty(TM)$ aller Vektorfelder auf $G$.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen zueinander inverse Vektorraumisomophismen sind:

$$\begin{aligned} &T_eG \to LG, \quad v \mapsto X^v \qquad \text{mit } X^v(g) = Dl_g(e)v, \\ &LG \to T_eG, \quad X \mapsto X(e). \end{aligned}$$

Es ist üblich, $LG$ mit $T_eG$ zu identifizieren; damit trägt $T_eG$ die Liealgebrastruktur

$$[v,w] = [X^v, X^w](e) \quad (v, w \in T_eG).$$

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Liealgebrastruktur für die Beispiele aus Aufgabe 1.

**Aufgabe 6:** Sei $f : G \to H$ ein Liegruppenhomomorphismus, d.h. $f$ ist glatter Gruppenhomomorphismus. Verifizieren Sie, dass die durch $Df(e)$ induzierte Abbildung $Lf : LG \to LH$ ein Liealgebra-Homomorphismus ist, also $Lf \cdot [X,Y] = [Lf \cdot X, Lf \cdot Y]$.

**Beweis.** Nach Definition ist $Lf \cdot X \in LH$ das eindeutig bestimmte linksinvariante Feld mit $Lf \cdot X(e) = Df(e)X(e)$. Wir zeigen zuerst, dass $X$ zu $Lf \cdot X$ $f$-verwandt ist. Und zwar gilt:

$$\begin{aligned} Df(g)\cdot X(g) &= D(f \circ l_g)(e)\, X(e) \quad (X \text{ linksinvariant}) \\ &= D(l_{f(g)} \circ f)(e)\, X(e) \quad (\text{da } f \text{ Gruppenhomomorphismus}) \\ &= Dl_{f(g)}(e)\, Lf \cdot X(e) \quad (\text{da } f(e) = e) \\ &= Lf \cdot X(f(g)) \quad (\text{da } Lf \cdot X \text{ linksinvariant}). \end{aligned}$$

Sind nun $X, Y \in LG$, so gilt $Df \cdot [X,Y] = [Lf \cdot X, Lf \cdot Y] \circ f$ nach Differentialgeometrie I, Lemma 4.9. Damit ist $[Lf \cdot X, Lf \cdot Y]$ linksinvariantes Feld (Aufgabe 3) mit $[Lf \cdot X, Lf \cdot Y](e) = Df(e)[X,Y](e)$, d.h. es gilt $Lf \cdot [X,Y] = [Lf \cdot X, Lf \cdot Y]$.

**Aufgabe 7:** Überlegen Sie, dass für $X \in LG$ der Fluss $\phi^X : \mathbb{R} \times G \to G$ global definiert ist, und dass gilt:

$$\phi^X_t \circ l_g = l_g \circ \phi^X_t \qquad \text{für alle } g \in G.$$

**Definition.** Die Exponentialabbildung der Liegruppe $G$ ist gegeben durch

$$\exp : LG \to G,\ \exp(X) = \Phi^X(1, e).$$

**Aufgabe 8:** Für $X \in LG$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \to G$, $t \mapsto \exp(tX)$ ein Gruppenhomomorphismus, der als die von $X$ erzeugte Einparameter-Untergruppe bezeichnet wird.

**Aufgabe 9:** Zeigen Sie $D\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathrm{LG}}$. Insbesondere bildet die Exponentialabbildung eine Umgebung von $0 \in LG$ diffeomorph auf eine Umgebung von $e \in G$ ab.

**Aufgabe 10:** Zeigen Sie $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \quad$ für $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Definition.** Die adjungierte Darstellung der Liegruppe $G$ sowie die adjungierte Darstellung der Liealgebra $LG$ sind definiert durch

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(LG),\ \mathrm{Ad}(g)X = Dc_g(e)X,$$

$$\mathrm{ad} : LG \to \mathrm{End}(LG),\ \mathrm{ad}(X) = D\mathrm{Ad}(e)X.$$

Wir benötigen nun für alle $X, Y \in LG$ folgendes

**Lemma.** $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)\right)|_{s=0,t=0} = [X, Y]$.

**Beweis.** Sei $\phi_s$ der Fluss von $X$, also $\phi_s(e) = \exp(sX)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp(sX)\ \exp(tY)\ \exp(-sX)\right)|_{t=0,s=0} \\
= \;& \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\phi_{-s}(\exp(sX)\exp(tY))|_{t=0,s=0} \qquad (\text{da } \phi_{-s}(g) = g\ \exp(-sX), \text{ Aufgabe 6}) \\
= \;& \frac{\partial}{\partial s} D\phi_{-s}(\phi_s(e))\, Dl_{\exp(sX)}(e)\, Y(e)|_{s=0} \\
= \;& \frac{\partial}{\partial s} D\phi_{-s}(\phi_s(e))\, Y(\phi_s(e))|_{s=0} \qquad (Y \text{ linksinvariant}) \\
= \;& \frac{\partial}{\partial s}\left((\phi_{-s})_* Y\right)(e)|_{s=0} \qquad (\text{Definition pushforward}) \\
= \;& [X, Y] \qquad (\text{Differentialgeometrie I, Satz 4.6}).
\end{aligned}$$

**Aufgabe 11:** Zeigen Sie folgende Eigenschaften der adjungierten Darstellung:

(1) $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(LG)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Für $g \in G$ und $X, Y \in LG$ gilt $\mathrm{Ad}(g)[X, Y] = [\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y]$, das heißt $\mathrm{Ad}(g)$ ist ein Liealgebra-Homomorphismus (verwenden Sie Aufgabe 6).

(3) $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ (verwenden Sie das Lemma).

(4) $\mathrm{ad}(X)[Y, Z] = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z]$ für alle $X, Y, Z \in LG$.

**Aufgabe 12:** Berechnen Sie Ad und ad für die Beispiele aus Aufgabe 1.