Aufgabe 1 (*Günstige orthonormale Basisfelder*)
Sei g eine Riemannsche Metrik auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Levi-Civita-Zusammenhang D, und $p \in M$. Konstruieren Sie auf einer Umgebung U von p orthonormale Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$, das heißt $g(e_i, e_j) \equiv \delta_{ij}$, mit

$$D_{e_i} e_j(p) = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Aufgabe 2 (*Koordinatendarstellung von D auf Tensoren*)
Sei D der Levi-Civita-Zusammenhang auf der n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), mit zugehörigen Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k bezüglich der Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$. Leiten Sie für einen Tensor

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_r \leq n} T_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r} \, dx^{i_1} \otimes \ldots dx^{i_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \in C^\infty(T^{r,s} M)$$

die Koordinatendarstellung von $D_X T$ her.

Aufgabe 3 (*Levi-Civita-Zusammenhang für Warped-Product-Metriken*)
Seien (M_i, g_i), $i = 1, 2$, Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den kanonischen Zusammenhängen D_i. Es bezeichne $\pi_i : M = M_1 \times M_2 \to M_i$ die Projektion auf den jeweiligen Faktor. Berechnen Sie den kanonischen Zusammenhang D für die Warped-Product-Metrik $g = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \, \pi_2^* g_2$, das heißt

$$g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = g_1(p_1)(X_1, , Y_1) + f(p_1)^2 \, g_2(p_2)(X_2, Y_2)) \text{ für } X_i, Y_i \in T_{p_i} M_i.$$

Dabei ist $f \in C^\infty(M_1)$ mit $f > 0$ die sogenannte warping Funktion.

Aufgabe 4 (*Kovariante Ableitung von J auf Flächen*)
Sei (M, g) eine orientierte, zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $J \in C^\infty(T^{1,1} M)$ das eindeutig bestimmte Endomorphismenfeld mit

$$J e_1 = e_2, \; J e_2 = -e_1$$

für eine (und damit jede (!)) positiv orientierte Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von $T_p M$. Folgern Sie $DJ = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 27.04.2004 bis 9:15.