Aufgabe 1 (*Killing-Felder* [1])
Ein Vektorfeld Y auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt Killing-Feld, wenn DY schiefsymmetrisch ist, das heißt es gilt:

$$g(DY \cdot X, X) = 0 \quad \text{für alle } X \in TM.$$

Zeigen Sie für eine beliebiges (vollständiges) Vektorfeld Y mit Fluss $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, p) \mapsto \phi_t(p)$, und $X \in TM$ die Formeln

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(D\phi_t \cdot X) &= DY \cdot D\phi_t \cdot X, \\ \frac{d}{dt} g(D\phi_t \cdot X, D\phi_t \cdot X) &= 2\, g(DY \cdot D\phi_t \cdot X, D\phi_t \cdot X). \end{aligned}$$

Schliessen Sie: ein vollständiges Vektorfeld ist genau dann Killingfeld, wenn der zugehörige Fluss aus Isometrien besteht.
Hinweis: Für 1. betrachten Sie $\gamma(s, t) = \phi_t(c(s))$, wobei $c(s)$ Kurve mit $c'(0) = X$.

Aufgabe 2 (*Transformation der Christoffelsymbole unter einen Kartenwechsel*)
Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang D. Betrachte zwei Karten $\phi : U \to \phi(U)$, $x = \phi(p)$, und $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, mit zugehörigen Kartenwechseln $F = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ beziehungsweise $G = F^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$. Zeigen Sie:

$${}^{\psi}\Gamma_{ij}^{k}(p) = \sum_{\alpha,\beta,\lambda=1}^{n} {}^{\phi}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(p) \frac{\partial F^k}{\partial x^\lambda}(\phi(p)) \frac{\partial G^\alpha}{\partial y^i}(\psi(p)) \frac{\partial G^\beta}{\partial y^j}(\psi(p)) + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F^k}{\partial x^\lambda}(\phi(p)) \frac{\partial^2 G^\lambda}{\partial y^i \partial y^j}(\psi(p)).$$

Aufgabe 3 (*Paralleltranslation längs Breitenkreisen auf S^2*)
Sei $c : [0, 2\pi] \to S^2$, $c(\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Berechnen Sie die Paralleltranslation längs c für einen beliebigen Vektor $X \in T_{c(0)}S^2$.

Aufgabe 4 (*Killingvektorfelder auf S^n*)
Zeigen Sie, dass die $n(n+1)/2$ Vektorfelder

$$X_{ij} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{mit } 1 \le i < j \le n+1$$

eine Basis des Vektorraums aller Killing-Felder auf S^n bilden.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 04.05.2004 bis 9:15.

[1] W.Killing, 1847-1923, Bonner Mathematiker