Aufgabe 1 (*Symmetrien und Erhaltungsgrößen*)

(a) Sei X Killingfeld auf (M, g) (siehe Aufgabe 1, Serie 2) und $c : I \to M$ eine Geodätische. Dann gilt
$$g(c', X \circ c) = const.$$

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche. Ist c eine Kurve auf M, so sei $\phi(t)$ der Winkel im Punkt $c(t)$ zwischen der Kurve c und dem durch $c(t)$ verlaufenden Rotationskreis, und $r(t)$ der Abstand von $c(t)$ zur Rotationsachse. Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Ist c eine Geodätische, so ist $r(t)\cos\phi(t)$ konstant.

Aufgabe 2 (*Geodätisch konvexe Funktionen*)
Eine Funktion $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ heißt geodätisch konvex, wenn $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ konvex ist für alle Geodätischen $\gamma : I \to M$. Zeigen Sie:

(i) Ist f geodätisch konvex und $\gamma : [a, b] \to M$ Geodätische, so gilt
$$f(\gamma(s)) \leq \frac{s-a}{b-a} f(\gamma(b)) + \frac{b-s}{b-a} f(\gamma(a)) \quad \text{für alle } s \in [a, b].$$

(ii) $f \in C^2(M)$ ist genau dann geodätisch konvex, wenn $D^2 f(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ positiv semidefinit ist für alle $p \in M$.

(iii) Eine geodätisch konvexe Funktion auf $\mathbb{S}^n$ ist konstant.

Aufgabe 3 (*Geodätische im n-dimensionalen hyperbolischen Raum*)
Berechnen Sie die Geodätischen im hyperbolischen Raum, für das obere-Halbraum-Modell
$$\mathbb{H}^n = (\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2).$$

Hinweis: Es ist leicht zu sehen, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ isometrisch auf $\mathbb{H}^2$ operiert durch gebrochen-lineare Transformationen.

Aufgabe 4 (*Geodätische mit freiem Endpunkt auf einer Untermannigfaltigkeit*)
Sei $N \subset (M, g)$ Untermannigfaltigkeit und $\gamma_0 : [a, b] \to M$ glatte Kurve. Es gelte
$$\frac{d}{dt} E(\gamma(\cdot, t))|_{t=0} = 0$$
für alle Variationen $\gamma : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von $\gamma_0 = \gamma(\cdot, 0)$ mit $\gamma(a, t) = \gamma_0(a)$ und $\gamma(b, t) \in N$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Zeigen Sie: γ_0 ist Geodätische mit $\gamma'(b) \perp T_{\gamma_0(b)}N$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 11.05.2004 bis 9:15.