Aufgabe 1 (*Distanzfunktionen*)

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|\text{grad}_g f\|_g \equiv 1$ heißt Distanzfunktion. Zeigen Sie:

- (a) Integralkurven von $\text{grad}_g f$ sind Geodätische.
- (b) Für eine stückweise C^1 -Kurve c von p nach q gilt $L_g(c) \geq f(q) - f(p)$, mit Gleichheit genau dann wenn c Integralkurve von $\text{grad}_g f$ ist.

Aufgabe 2 (*Eigentliche Immersionen*)

Eine Immersion $f : M \rightarrow N$ heißt eigentlich, wenn $f^{-1}(K)$ kompakt ist für alle kompakten $K \subset N$. Zeigen Sie:

- (a) Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ist die Inklusionsabbildung eigentlich.
- (b) Ist (N, h) vollständig und M zusammenhängend, so ist M mit der induzierten Riemannschen Metrik $g = f^*h$ vollständig.

Aufgabe 3 (*Vollständigkeit homogener Räume*)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt homogener Raum, wenn die Isometriegruppe G transitiv auf M operiert. Folgern Sie, dass (M, g) vollständig ist.

Aufgabe 4 (*Exponentialabbildung von $\mathbb{H}^n$*)

Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $\langle x, y \rangle_L = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i$. Das Minkowski-Modell des hyperbolischen Raums ist $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^0 > 0, \langle x, x \rangle_L = -1\}$, mit der Riemannschen Metrik $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle_L$ (vgl. Diffgeo I, Serie 13, Aufgabe 2).

- (a) Zeigen Sie, dass $\text{SO}^+(1, n)$ isometrisch und transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $\{X \in T\mathbb{H}^n : \langle X, X \rangle_L = 1\}$ operiert.
- (b) Berechnen Sie in diesem Modell die Exponentialabbildung von $\mathbb{H}^n$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 18.05.2004 bis 9:15.