**Aufgabe 1** (*Distanzfunktionen*)
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\|\mathrm{grad}_g f\|_g \equiv 1$ heißt Distanzfunktion. Zeigen Sie:

(a) Integralkurven von $\mathrm{grad}_g f$ sind Geodätische.

(b) Für eine stückweise $C^1$-Kurve $c$ von $p$ nach $q$ gilt $L_g(c) \geq f(q) - f(p)$, mit Gleichheit genau dann wenn $c$ Integralkurve von $\mathrm{grad}_g f$ ist.

**Aufgabe 2** (*Eigentliche Immersionen* )
Eine Immersion $f : M \to N$ heißt eigentlich, wenn $f^{-1}(K)$ kompakt ist für alle kompakten $K \subset N$. Zeigen Sie:

(a) Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ ist die Inklusionsabbildung eigentlich.

(b) Ist $(N, h)$ vollständig und $M$ zusammenhängend, so ist $M$ mit der induzierten Riemannschen Metrik $g = f^*h$ vollständig.

**Aufgabe 3** (*Vollständigkeit homogener Räume* )
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, g)$ heißt homogener Raum, wenn die Isometriegruppe $G$ transitiv auf $M$ operiert. Folgern Sie, dass $(M, g)$ vollständig ist.

**Aufgabe 4** (*Exponentialabbildung von $\mathbb{H}^n$*)
Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $\langle x, y\rangle_L = -x^0y^0 + \sum_{i=1}^n x^iy^i$. Das Minkowski-Modell des hyperbolischen Raums ist $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^0 > 0, \langle x, x\rangle_L = -1\}$, mit der Riemannschen Metrik $g(X, Y) = \langle X, Y\rangle_L$ (vgl. Diffgeo I, Serie 13, Aufgabe 2).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}^+(1, n)$ isometrisch und transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $\{X \in T\mathbb{H}^n : \langle X, X\rangle_L = 1\}$ operiert.

(b) Berechnen Sie in diesem Modell die Exponentialabbildung von $\mathbb{H}^n$.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 18.05.2004 bis 9:15.*