
Anwesenheitsübung(*Riemannsche Überlagerungen*)
Sei $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ lokale Isometrie zwischen zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sei vollständig. Zu $p \in M$ sei $r > 0$ so gewählt, dass $\exp_p : B_r(0) \to B_r(p)$ diffeomorph ist. Beweisen Sie:

$$\pi^{-1}(B_r(p)) = \bigcup_{\widetilde{p} \in \pi^{-1}\{p\}} B_r(\widetilde{p}) \quad \text{(disjunkte Vereinigung).}$$

Bemerkung. Also ist π eine Überlagerung (π ist surjektiv nach Satz 2.6 der Vorlesung). Aus dem Abbildungsliftungssatz folgt: ist M einfach zusammenhängend, so ist π eine (globale) Isometrie.

Aufgabe 1 (*Kürzeste in flachen Tori*)
Sei $\mathbb{R}^2/\Gamma$ ein flacher Torus, wobei $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot \tau$ mit $\tau \in M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ y \geq 0\}$ (vgl. Diffgeo 1, Beispiel 7.6). Bestimmen Sie für $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ die maximale Länge $\sigma(v) \in (0, \infty)$, so dass die Geodätische

$$c : [0, \sigma(v)] \to \mathbb{R}^2/\Gamma,\ c(s) = [p + sv],$$

kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist.
Hinweis. Der Fall eines Rechtecktorus, also $\tau = te_2$ mit $t \geq 1$, ist einfach.

Aufgabe 2 (*Vollständiges, nichtkompaktes Beispiel mit endlichem Volumen*)
Konstruieren Sie eine nichtkompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen, zum Beispiel in Dimension 2.

Aufgabe 3 (*Geodätische Strahlen*)
Sei (M, g) vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Geodätische $\gamma : [0, \infty) \to (M, g)$ heißt Strahl, wenn gilt:

$$d(c(s_1), c(s_2)) = L_g(c|_{[s_1, s_2]}) \quad \text{für alle } 0 \leq s_1 < s_2 < \infty.$$

Konstruieren Sie zu $p \in M$ einen Strahl γ mit $\gamma(0) = p$.

Aufgabe 4 (*Vollständige Metriken*)
Seien g, h Riemannsche Metriken auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Es gebe eine Konstante $C > 0$ mit $g \geq C\, h$. Begründen Sie: ist (M, h) geodätisch vollständig, so auch (M, g).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 25.05.2004 bis 9:15.