

Anwesenheitsübung (*Riemannsche Überlagerungen*)

Sei $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$ lokale Isometrie zwischen zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sei vollständig. Zu $p \in M$ sei $r > 0$ so gewählt, dass $\exp_p : B_r(0) \rightarrow B_r(p)$ diffeomorph ist. Beweisen Sie:

$$\pi^{-1}(B_r(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}\{p\}} B_r(\tilde{p}) \quad (\text{disjunkte Vereinigung}).$$

Bemerkung. Also ist π eine Überlagerung (π ist surjektiv nach Satz 2.6 der Vorlesung). Aus dem Abbildungs-*liftungs*ssatz folgt: ist M einfach zusammenhängend, so ist π eine (globale) Isometrie.

Aufgabe 1 (*Nichtglatte Quotienten*)

Ist die Operation einer kompakten Liegruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M nicht frei, so muss der Quotient keine topologische Mannigfaltigkeit sein. Finden Sie ein Beispiel.

Aufgabe 2 (*Irrationale Translationen*)

Betrachten Sie die Operation

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \cdot (x, y) = (x + t, y + bt) \quad \text{für } b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass eine glatte und freie Operation auf dem Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert wird, dass aber im Fall $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der Quotientenraum nicht Hausdorffsch ist.

Aufgabe 3 (*Geodätische und Untermannigfaltigkeiten*)

Sei $M \subset (N, g)$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- (a) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ Geodätische in N , so auch in M .
- (b) Es gebe eine Isometrie $f : (N, g) \rightarrow (N, g)$ mit $M = \{p \in N : f(p) = p\}$.
Folgern Sie, dass M total geodätisch ist: jede Geodätische in M ist sogar Geodätische in N .

Aufgabe 4 (*Quotientenräume*)

Geben Sie Homeomorphismen (mit Nachweis) an:

- (a) $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}P^n$, wobei $\mathbb{S}^1$ auf $\mathbb{S}^{2n+1}$ durch $(e^{it}, z) \mapsto e^{it}z$ operiert.
- (b) $\text{SO}_n/\text{SO}_{n-1} \cong \mathbb{S}^{n-1}$, wobei SO_{n-1} als die Isotropiegruppe von e_n aufgefasst wird, das heißt $\text{SO}_{n-1} = \{S \in \text{SO}_n : Se_n = e_n\}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 01.06.2004 bis 9:15.