Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie II — SS 04, Serie 7
Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 17. Juni 2004

Aufgabe 1 (*Gruppenoperationen und Abbildungen*)
Die Liegruppe G operiere frei und eigentlich auf X, und $H : X \to Y$ sei differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Gilt $H(g \cdot x) = H(x)$ für alle $g \in G$, $x \in X$, so induziert H eine glatte Abbildung $h : X/G \to Y$.

(b) Operiert G auch frei und eigentlich auf Y und gilt $H(g \cdot x) = g \cdot H(x)$ für alle $g \in G$, $x \in X$, so induziert H eine glatte Abbildung $h : X/G \to Y/G$.

Aufgabe 2 (*Abstand in* $\mathbb{C}P^n$)
Berechnen Sie für $z, w \in \mathbb{S}^{2n+1}$ den Riemannschen Abstand $\mathrm{d}(p,q)$ der Punkte $p = \pi(z)$ und $q = \pi(w)$ in $\mathbb{C}P^n$.

Aufgabe 3 (*Veronese-Einbettung*)
Die Abbildung $F : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ sei definiert durch

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} p_z \ \text{ mit } p_z(w) = (w,z)z = \langle w, z\rangle z + \langle w, iz\rangle iz.$$

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ ist gegeben durch

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(B^* A) \qquad \text{für } A, B \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass F eine Einbettung $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ induziert, die bezüglich des Standardskalarprodukts isometrisch ist. Zeigen Sie weiter, dass f in folgende Sphäre S der Dimension $(n+1)^2 - 2$ abbildet:

$$S = \{A \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} : A^* = A,\ \mathrm{tr}(A) = 1/\sqrt{2},\ |A| = 1/\sqrt{2}\}.$$

Bemerkung. Der Mittelpunkt der Sphäre ist $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} E_{n+1}$, der Radius ist $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Aufgabe 4 (*Die Untermannigfaltigkeiten* $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^n$)
Zeigen Sie, dass für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Spiegelung

$$T : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1},\ T(z^1, \ldots, z^{k+1}, z^{k+2}, \ldots, z^{n+1}) = (z^1, \ldots, z^{k+1}, -z^{k+2}, \ldots, -z^{n+1})$$

eine Isometrie von $\mathbb{C}P^n$ induziert. Folgern Sie mit Aufgabe 3, Serie 6, dass die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^n$ total geodätisch ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 15.06.2004 bis 9:15.