Aufgabe 1 (*Die Schnittkrümmung bestimmt den Krümmungstensor*)
Sei R der Krümmungstensor von (M, g) und $K(X,Y) := R(X,Y,Y,X)$. Zeigen Sie die Formel

$$-6\,R(X,Y,Z,W) = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\bigg|_{s,t=0} \big(K(X+sZ, Y+tW) - K(X+sW, Y+tZ)\big).$$

Der Krümmungstensor kann also aus der Schnittkrümmung berechnet werden.

Aufgabe 2 (*Divergenzfreiheit des Einsteintensors*)
Der Einsteintensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist $G = Ric - \frac{1}{2}S_g\, g$. Zeigen Sie mit der 2. Bianchi-Identität: $D^*G = 0$.

Aufgabe 3 (*Krümmungsoperator und Ricci-Krümmung in Dimension* 3)
Der Krümmungsoperator $\mathcal{R} \in C^\infty(\mathrm{End}(\Lambda_2 TM))$ von (M, g) ist definiert durch

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge W) = R(X,Y,W,Z) \text{ für alle } X,Y,Z,W \in C^\infty(TM).$$

Im Fall $\dim(M) = 3$ existiert eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von T_pM, so dass $\mathcal{R}(p)$ bzgl. der Basis $\{v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3\}$ Diagonalgestalt hat (wieso?):

$$\mathcal{R}(p) = \begin{pmatrix} K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie bezüglich $\{v_1, v_2, v_3\}$ die Matrixdarstellung

$$\mathrm{Ric}(p) = \begin{pmatrix} K_{12}+K_{13} & 0 & 0 \\ 0 & K_{12}+K_{23} & 0 \\ 0 & 0 & K_{13}+K_{23} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*Krümmungstensor von* $\mathbb{H}^n$)
Zeigen Sie: $\mathbb{H}^n$ hat konstante Schnittkrümmung gleich -1.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 29.06.2004 bis 9:15.