

Aufgabe 1 (*Total geodätische Immersionen*)

Eine isometrische Immersion $f : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ heißt total geodätisch, wenn gilt:

$$\gamma : I \rightarrow (M, g) \text{ Geodätische} \quad \Rightarrow \quad f \circ \gamma : I \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \text{ Geodätische.}$$

Zeigen Sie, dass f genau dann total geodätisch ist, wenn die zweite Fundamentalform A verschwindet.

Aufgabe 2 (*Liegruppen mit biinvarianter Metrik*)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ biinvariante Riemannsche Metrik auf der Liegruppe G , das heißt die Links- bzw. Rechttranslationen l_g bzw. r_g sind Isometrien. Die linksinvarianten Vektorfelder werden durch die Identifikation $LG \cong T_e G$ zu einem Skalarproduktraum. Zeigen Sie für $X, Y, Z, W \in LG$ folgende Aussagen:

- (a) Die adjungierte Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(LG)$ ist orthogonal:

$$\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

- (b) Die adjungierte Darstellung $\text{ad} : LG \rightarrow \text{End}(LG)$ ist schiefssymmetrisch:

$$\langle \text{ad}(X)Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}(X)Z \rangle = 0.$$

- (c) $\langle X(g), Y(g) \rangle \equiv \langle X(e), Y(e) \rangle$ für alle $g \in G$.

- (d) $D_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]$ (verwenden Sie Formel (1.2) für den Levi-Civita Zusammenhang sowie die Gleichung $[X, Y] = \text{ad}(X)Y$, siehe Liegruppen, Aufgaben 11).

- (e) $R(X, Y, Z, W) = -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle$ (insbesondere $R(X, Y, Y, X) \geq 0$).

Bemerkung. Eine biinvariante Metrik existiert zum Beispiel auf jeder kompakten Liegruppe G .

Aufgabe 3 (*Clifford-Torus*)

Berechnen Sie zweite Fundamentalform und Krümmung der induzierten Metrik für

$$f : \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ix}, e^{iy}).$$

Überlegen Sie, dass f eine Minimalfläche in $\mathbb{S}^3$ ist, das heißt $\vec{H} \equiv 0$.

Aufgabe 4 (*Minimale Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$*)

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit induzierter Metrik $g = f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ und mittlerem Krümmungsvektor $\vec{H} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\vec{H} = \Delta_g f.$$

Folgern Sie, dass M nicht kompakt sein kann, wenn f minimale Immersion ist.

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion $u = \frac{1}{2} |f|^2$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe am Dienstag, 06.07.2004 bis 9:15.