
Aufgabe 1 *Fortsetzung eines Vektorfeldes*
Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und Y ein glattes Vektorfeld auf M. Zeigen Sie: Für alle $p \in M$ existiert eine offene Menge (bezüglich $\mathbb{R}^n$) $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, und ein glattes Vektorfeld $\tilde{Y}$ auf U so dass: $\tilde{Y}|_{U\cap M} = Y$.

Aufgabe 2 *Wohldefiniertheit des induzierten Zusammenhanges*

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, Y ein glattes Vektorfeld auf M, $p \in M$, und $X_p \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$. Mann Zeige:

(a) $\nabla^{\mathbb{R}^n}_{X_p}\tilde{Y}$ hängt nicht von der Wahl der Forsetzung $\tilde{Y}$ ab.

(b) $\nabla^M_{X_p}Y$ ist $\mathbb{R}$ linear in X_p und Y.

(c) Für $f : U \subset M \to \mathbb{R} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ gilt

$$\nabla^M_{X_p}(fY) = X_p(f)Y(p) + f(p)\nabla^M_{X_p}Y.$$

Aufgabe 3 *Kovariante Ableitung und Kurven, die zu Vektorfelder passen*

Sei ∇ ein beliebiger Zussamenhang auf einer Mannigfaltigkeit M.
Zeigen Sie: $\nabla_{X_p}Y$ ist nur von X_p und den Werten von Y auf einer beliebigen Kurve γ, die zu X_p passt, abhängig.

Aufgabe 4 *Eigenschaften von* ∇^M

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und ∇^M wie in der Vorlesung. Mann Zeige:

(a) $\nabla^M_X Y - \nabla^M_Y X = [X, Y]$.

(b) $X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla^M_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^M_X Z\rangle$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 02.05.2006 bis 9:15.