Aufgabe 1 *Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen*

Seien $A^i_j : [-a^2, b^2] \to \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen, $j, i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben ($b \neq 0$). Der Satz von Picard-Lindelof garantiert, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $X \in C^\infty([0, \epsilon], \mathbb{R}^n)$ zu

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dX^i}{dt} &= A^i_j \cdot X^j \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

existieren. Man zeige: Es existiert eine Lösung $X \in C^\infty([-a^2, b^2], \mathbb{R}^n)$ zu (1).
Hinweis: Zeigen Sie, dass $|X|, |X'|, \ldots, |X^m|$ beschränkt auf $[0, \delta)$ sind (für beliebiges $m \in \mathbb{N}$), wobei $[0, \delta)$ der maximale Definitionsbereich der Lösung X ist (differenzieren Sie die Gleichung (1)).

Aufgabe 2 *Kovarinate Ableitung mittels Paralleltransport*

Sei M eine Mannigfaltigkeit, ∇ ein Zusammenhang auf M, $p \in M$, $X_p \in T_pM$ und Y ein lokales Vektorfeld auf $p \in U \subset M$ (U offen). Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X_p$. Dann gilt:

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} ({}^\gamma\pi_{0,-t}(Y(\gamma(t)) - Y(p)).$$

wobei ${}^\gamma\pi_{s,t}$ der Paralleltransport längs γ von $\gamma(s)$ für eine Zeit t ist (wie in der Vorlesung: für $t < 0$ überlegen Sie, was die *richtige* Definition ist).

Aufgabe 3 *Wohldefiniertheit der kovarianten Ableitung*

Für $S \in T^r_s(M)$ sei ∇S wie in der Vorlesung (Definition 1.25) definiert. Zeigen Sie, dass ∇S wohldefiniert ist.

Aufgabe 4 Geodätische auf $SO(n)$

Betrachten Sie $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle X_p, Y_p \rangle = tr(X^t \cdot Y),$$

und auf $SO(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ die induzierte Metrik. Berechnen Sie eine Formel für $\gamma_X(s)$ für $X \in T_{Id}(SO(n))$, wobei $\gamma_X : \mathbb{R} \to SO(n)$ die Geodätische durch $Id \in SO(n)$ mit $\frac{d}{dt}\gamma_X(0) = X$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 16.05.2006 bis 9:15.