Aufgabe 1 (*Distanzfunktionen*)

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\|\mathrm{grad}_g f\|_g \equiv 1$ heißt Distanzfunktion. Zeigen Sie:

(a) Integralkurven von $\mathrm{grad}_g f$ sind Geodätische.

(b) Für eine stückweise C^1-Kurve c von p nach q gilt $L_g(c) \geq f(q) - f(p)$, mit Gleichheit genau dann wenn c Integralkurve von $\mathrm{grad}_g f$ ist.

Aufgabe 2 *Parallel-Transport einer positiv orientierten Basis*
M ist eine Mannigfaltigeit, und ∇ ein Zusammenhang auf M. $[\{e_1(0), e_2(0), \ldots, e_n(0)\}]$ sei eine positiv orientierte Basis für T_pM, $\gamma : I = [0,1] \to M$ eine C^∞ Kurve. Für all $i \in \mathbb{N}$, sei $e_i : I \to M$ der Parallel-Transport von $e_i(0)$ längs γ. Man Zeige: $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ ist eine Basis, und $[\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)\}]$ ist positiv orientiert für alle $t \in I$.

Aufgabe 3 *Aussagen über Geodätische*
Man Beweise:

(1) zu $v \in T_pM$ gibt es eine eindeutig bestimmte, rechtseitig maximale Geodätische $\gamma_v : [0, \rho_v) \to M$ mit

$$\gamma_v'(0) = v \quad \text{wobei} \quad \rho_v \in (0, \infty]$$

(2) Für $\lambda > 0$ gilt: $\rho_{\lambda v} = \frac{1}{\lambda}\rho_v$ und $\gamma_{\lambda v} = \gamma_v(\lambda s)$.

(3) Ist $\rho_v < \infty$, dann gilt: für alle $K \subset M$, K kompakt, existiert es ein $0 < s < \rho_v$, so dass $\gamma_v(t) \notin K$ für alle $t \in (s, \rho_v)$.

Aufgabe 4 Geodätische in $U \subset \mathbb{R}^n$ und S^n

- Sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge (Mannigfaltigkeit) mit der Standard-Metrik. Man Zeige: Für $v \in T_0U$, $\gamma_v : [0, \rho_v)$ erfüllt $\gamma_v(t) = tv$ für alle $t \in [0, \rho_v)$. Falls $\rho_v < \infty$, gilt $\rho_v v \in \delta U$. Ist, im Fall $\rho_v < \infty$, $dist(0, \delta U) = \rho_v v$?

- Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Standard-Metrik versehen. Zeigen Sie: in S^n gilt für $v \in T_pS^n$ $p \in \mathbb{R}^{n+1}$

  $$\gamma_v : \mathbb{R} \to S^n, \gamma_v(s) = \cos(|v|s)p + \sin(|v|s)\frac{v}{|v|}.$$

  Also folgt:

  $$\exp_p : T_pS^n \to S^n, \exp_p(v) = \cos(|v|)p + \sin(|v|)\frac{v}{|v|}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 23.05.2006 bis 9:15.