Aufgabe 1 (*C^∞ Lokal-Basis*)

Sei (M, g) eine Riem. Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: zu $p \in M$, existiert es ein Othonormal Basisfeld $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ auf M (man braucht lediglich die Definition einer Riemmanschen Mannigfaltigkeit um das Feld zu konstruieren).

Aufgabe 2 *Hopf-Rinow*

Sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit, und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierte Riemmansche Metrik $h = i^*g$ versehen ($i : N \to M$ die Inklusion). Zeigen Sie: Ist (M, g) vollständig und N zusammenhängend, so ist (N, h) vollständig.

Aufgabe 3 *Polarkoordinaten*

Sei (M, g) eine Riem. Mannigfaltikeit und $f : (0, s) \times S_p \to M$

$$f(r, \omega) = exp_p(r\omega),$$

wohldefiniert, wobei $S_p = \{v \in T_pM : ||v||_g = 1$. Man Zeige:

$$f^*g|_{(r_0,\omega_0)} = dr^2|_{r_0} \oplus r_0^2 h|_{(r_0,\omega_0)},$$

wobei dr^2 die Standard Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, und $h|_{(r_0,\omega_0)}$ eine Riem. Metrik auf S_p ist, genaurere gilt für $\psi, \eta \in T_{\omega_0}S_p$:

$$h|_{(r_0,\omega_0)}(\psi, \eta) = g(D\exp_p(r_0\omega_0)(\psi), D\exp_p(r_0\omega_0)(\eta)).$$

Aufgabe 4 *Kompakte Mengen in Riemmansche Mannigfaltigkeiten*

Sei (M, g) zusammenhängend, $B \subset M$ ein beschränktes, abgeschlossenes Gebiet, und $p_i \in B$. Ist es immer möglich ein $\epsilon > 0$ zu finden, so dass für alle $p_i \in M$, es existiert $\phi : {}^gB_\epsilon(p_i) \to {}^{\mathbb{R}^n}B_\epsilon(0)$ (bijektive Abbildung) Koordinaten ? Errinerung: ${}^gB_r(p) = \{x \in M : {}^gd(x, p) < r\}$, ${}^{\mathbb{R}^n}B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathbb{R}^n} < r\}$,

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 30.05.2006 bis 9:15.