Aufgabe 1 (*Vollständigkeit homogener Räume*)
Eine Gruppe G operiert *transitiv* auf eine Mannigfaltigkeit M falls für alle $x, y \in M$ existsiert es ein $g \in G$ mit $g(x) = y$. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt homogener Raum, wenn die Isometriegruppe G transitiv auf M operiert. Folgern Sie, in dem Fall, dass (M, g) vollständig ist.

Aufgabe 2 (*Vollständige Metriken*)

Seien g, h Riemannsche Metriken auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Es gebe eine Konstante $C > 0$ mit $g \geq C\,h$. Begründen Sie: ist (M, h) geodätisch vollständig, so auch (M, g).

Aufgabe 3 (*Geodätische Strahlen*)
Sei (M, g) vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Geodätische $\gamma : [0, \infty) \to (M, g)$ heißt Strahl, wenn gilt:

$$d(c(s_1), c(s_2)) = L_g(c|_{[s_1,s_2]}) \quad \text{für alle } 0 \leq s_1 < s_2 < \infty.$$

Konstruieren Sie zu $p \in M$ einen Strahl γ mit $\gamma(0) = p$.

Aufgabe 4 (*Vollständiges, nichtkompaktes Beispiel mit endlichem Volumen*)
Konstruieren Sie eine nichtkompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen, zum Beispiel in Dimension 2.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 13.06.2006 bis 9:15. Frohe Feiertage!