
Aufgabe 1 (*Beweis von Hopf-Rinow*)
Zeigen Sie die Implikation (3) impliziert (4) der Ausage des Theorems 2.25 (Hopf-Rinow) der Vorlesung:
(3) Jede abgeschlossene, beschränkte Menge in (M, g) ist kompakt.
(4) $(M, {}^g d)$ ist ein vollstädinger metrischer Raum.

Aufgabe 2 (*Injektivitäts Radius*)
Konstruieren Sie eine vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit(M, g) mit $inj(M, g) = 0$.

Aufgabe 3 (*Lie-Klammern eines Horizontale Lifts*)
Sei $\pi : (N, h) \to (M, h)$ eine Riemannsche Submersion. Für $X \in \mathcal{X}(M)$ sei $\tilde{X} \in \mathcal{X}(N)$ der horizontale Lift von X. Dann gilt: $[\tilde{X}, \tilde{Y}] - [X, Y]\tilde{}$ ist vertikal für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Aufgabe 4 (*Irrationale Translationen*)

Betrachten Sie die Operation

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, t \cdot (x, y) := (x + t, y + bt)$$

für ein fixiertes $b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine glatte und freie Operation auf dem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert wird, dass aber im Fall $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ der Quotientraum nicht Hausdorffsch ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 19.06.2006 bis 9:15.