Aufgabe 1($O(n)$ *ist eine Liegruppe*)
Man Zeige: $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{nxn} : {}^tAA = 1\}$ ist eine Liegruppe der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Hinweis: Siehe Vorlesung.

Aufgabe 2 ($\mathbb{C}P^n$ *als Quotient Mannigfaltigkeit*)
Geben Sie der Homöomorphismus (mit Nachweis) an: $S^{2n+1}/S^1 \equiv \mathbb{C}P^n$, wobei

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \ldots + |z_n^2| = 1\},$$

und die Operation ist $\exp^{it} \cdot (z_1, \ldots, z_n) := (\exp^{it} z_1, \ldots, \exp^{it} z_n)$. Zeigen Sie, dass die Operation frei und eigentlich ist.

Aufgabe 3 (S^{n-1} *als Quotient Mannigfaltigkeit*)
Geben Sie der Homöomorphismus (mit Nachweis) an: $SO_n/SO_{n-1} \equiv S^{n-1}$, wobei SO_{n-1} als die Isotropiegruppe von e_n aufgefasst wird, das heißt $SO(n-1) = \{A \in SO_n : A(e_n) = e_n\}$, und die Operation ist standard Matrixmultiplikation ($SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$). Zeigen Sie, dass die Operation frei und eigentlich ist.

Aufgabe 4 (*Geodätische und Untermannigfaltigkeiten*)
Sei $M \subset (N, g)$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Ist $\gamma : [a, b] \to M$ Geodätische in N, so auch in M.

(b) Nehmen Sie an, es gebe eine Isometrie $f : (N, g) \to (N, g)$ mit $M = \{p \in N : f(p) = p\}$. Folgern Sie, dass M total geodätisch ist: jede Geodätische in M ist sogar Geodätische in N.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 26.06.2006 bis 9:15.