Aufgabe 1 *Kompakte Mengen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten*
Sei (M, g) zusammenhängend, $B \subset M$ ein beschränktes, abgeschlossenes Gebiet. Ist es immer möglich ein $\epsilon > 0$ zu finden, so dass für alle $p \in B$ Koordinaten $\phi : {}^gB_\epsilon(p_i) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathbb{R}^n}B_\epsilon(0)$ existieren? Zur Erinnerung: ${}^gB_r(p) = \{x \in M : {}^gd(x, p) < r\}$ und ${}^{\mathbb{R}^n}B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathbb{R}^n} < r\}$. *Bemerkung: Falls M vollständig ist, ist B kompakt und es wird in der Vorlesung gezeigt, dass dann so ein ϵ existiert.*

Aufgabe 2 *Geodätische in $U \subset \mathbb{R}^n$*
Sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge (Mannigfaltigkeit) mit der Standardmetrik. Man zeige: Für $v \in T_0U$, erfüllt die maximale Geodäte $\gamma_v : [0, \rho_v) \longrightarrow U$, ($\gamma_v(t) = tv$ für alle $t \in [0, \rho_v)$) die folgende Bedingung. Falls $\rho_v < \infty$, gilt $\rho_v v \in \partial U$.
Sei $p \in U$. Ist $\sigma(t) := tp$ eine Geodäte in U, die 0 mit p verbindet?

Aufgabe 3 *Geodätischer Fluss*
Sei G das Vektorfeld auf TU wie in der Vorlesung definiert (für Koordinaten $\phi : U \to \phi(U)$). Man zeige (wie in der Vorlesung behauptet)

$$G(v_p)(f) = \frac{d}{dt}(f(\dot{\gamma}_{v_p}(t))$$

für jede Funktion $f : TU \to \mathbb{R}$, $p \in U$. Damit ist G wohldefiniert und glatt auf ganz M (hängt nicht von den Koordinaten ab).