Aufgabe 1 Konstruieren Sie eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g), die vollständig, zusammenhängend und NICHT kompakt ist, aber $vol(M, g) < \infty$ hat.

Aufgabe 2 Sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine stückweise C^1 Kürzeste von $\gamma(a)$ bis $\gamma(b)$. Zeigen Sie, dass $\gamma|_{[s_1,s_2]} : [s_1, s_2] \to M$ ist eine Kürzeste von $\gamma(s_1)$ bis $\gamma(s_2)$, wobei $a \leq s_1 < s_2 \leq b$.

Aufgabe 3 *Poincaré/Lobatchevski-Halbebene*
Betrachten Sie $(\mathbb{H}, g)$, wobei $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ und

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

ist. Zeigen Sie:

i) Die Geodäten sind genau die senkrechten Geraden und die Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse. Parametrisieren Sie die Kreise wie folgt,

$$\gamma(t) = (rtanh(t) + m, \frac{r}{cosh(t)}),\ r \in \mathbb{R}_{>0},\ m \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbb{H}, g)$ ist vollständig.

ii) Zu $p, q \in \mathbb{H}$ existiert genau eine Geodäte von p nach q.