
Aufgabe 1
Sei $\pi : (N, h) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion und $\gamma : [0, 1] \to M$ und $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to N$ ein horizontaler Lift von γ ($\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}'(t) \in H(\tilde{\gamma}(t))$ für alle $t \in [0, 1]$). Man Zeige: γ ist eine Geodäte genau dann , wenn $\tilde{\gamma}$ eine Geodäte ist.

Aufgabe 2
Sei $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A \cdot A^t = Id\}$. Auf $SO(n) = \{A \in O(n) | det(A) = 1\}$ operiert die Untergruppe $H = \{h \in SO(n) : he_n = e_n\}$ von rechts durch

$$SO(n) \times H \to SO(n),\ \phi(g, h) = g \cdot h$$

(Matrizenmultiplikation). Zeigen Sie: $SO(n)/H$ ist homeomorph zu S^{n-1}.

Aufgabe 3 *Der komplex projektive Raum*
Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ ist die Menge der 1-dim. komplexen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$, d.h. $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei $Z \sim W :\Leftrightarrow Z = \lambda W,\ \lambda \in \mathbb{C}^*$. Es sei $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ die Quotientenabbildung. Die Einschränkung $\pi | S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ ist dann eine Submersion. Das hermitesche Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n+1}$ ist: $(Z, W) = \sum_{i=0}^n z_0 \bar{w}_0$. $\tilde{g}_Z(V, W) := Re((V, W))$ für $V, W \in T_Z S^{2n+1}$ definiert dann eine Riemannsche Metrik auf S^{2n+1} (die von $\mathbb{R}^{2n+2}$ induzierte Standartmetrik). Zeigen Sie:

a) Für $Z, W \in S^{2n+1}$ gilt $Z \sim W \Leftrightarrow Z = e^{i\phi} W$. Die Abbildungen $e^{i\phi} : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ sind Isometrien.

b) Bestimmen Sie den vertikalen und den horizontalen Tangentialraum (bzgl. $\pi | S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$).

c) Definieren Sie eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{C}P^n$ so dass $\pi | S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ eine Riemannsche Submersion wird.