**Aufgabe 1** (*Riemannsche Metrik auf dem Tangentialbündel*)
Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $TM$ das Tangentialbündel und $\pi : TM \longrightarrow M$ die Projektion. Für $(p,v) \in TM$ und $V,W \in T_{(p,v)}(TM)$ definieren wir:

$$\tilde{g}_{(p,v)}(V,W) := g_p(D\pi_{(p,v)}(V), D\pi_{(p,v)}(W)) + g_p(\frac{{}^lDv}{dt}(0), \frac{{}^qDw}{ds}(0)),$$

wobei $\alpha(t) := (l(t), v(t))$, $\beta(s) := (q(s), w(s))$ Kurven in $TM$ mit $\alpha(0) = (p,v)$, $\alpha'(0) = V$ bzw. $\beta(0) = (p,v)$, $\beta'(0) = W$ seien. $v(t)$ ist dann ein Vektorfeld auf $M$ längs der Kurve $l(t)$ in $M$ und $\frac{{}^lDv}{dt}$ bezeichnet die Ableitung von $v(t)$ längs $l(t)$. Zeigen Sie:

a) $\tilde{g}$ ist wohl definierter, symmetrischer $(2,0)$-Tensor auf $TM$.

b) $H_{(p,v)} := \{V \in T_{(p,v)}(TM) | \tilde{g}_{(p,v)}(V,W) = 0 \ \forall W \in ker D\pi_{(p,v)}\}$. Wann liegt $V$ in $H_{(p,v)}$?

c) $\tilde{g}$ ist eine Riemannsche Metrik auf $TM$.

d) $\pi : (TM, \tilde{g}) \longrightarrow (M,g)$ ist eine Riemannsche Submersion.

e) Integralkurven des Geodätischen Feldes $G \in \mathcal{X}(TM)$ sind Geodäten bezüglich $\tilde{g}$.