Aufgabe 1

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es seien $(U, \phi = (x_1, , , x_n))$ geodätische Koordinaten um p, $\gamma : [0, l] \to M$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = p$, und $W(p) = W^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_pM$ ein Tangentialvektor. Zeigen Sie: Das Jacobifeld $J : [0, l] \to TM$ längs γ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = W(p)$ ist gegeben durch:

$$J(s) := sW^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(s)),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die von ϕ induzierten Vektoren sind.

Aufgabe 2

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter, nicht negativer Schnittkrümmung K und $\gamma : [0, l] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Seien $u, w \in T_pM$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Jacobifeld J entlang γ mit $J(0) = u$ und $J'(0) = w$ gegeben ist durch

$$J(s) = \frac{1}{\sqrt{K}}((sin(\sqrt{K}s)W(s) + cos(\sqrt{K}s)U(s)) + \langle w, v\rangle s\gamma'(s) + \langle u, v\rangle\gamma'(s),$$

wobei W, U die Parallelverschiebungen von $w - \langle w, v\rangle v$ beziehungsweise von $\sqrt{K}(u - \langle u, v\rangle v)$ längs γ seien.