Aufgabe 1 (*Eindimensionale Mannigfaltigkeiten*)
Sei (M, g) eine zusammenhängende, eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Zu $p \in M$ gibt es eine nicht erweiterbare Kurve $c \in C^1((a, b), M)$ mit $\|c'\|_g \equiv 1$ und $c(0) = p$. Diese Kurve ist surjektiv.

(b) Entweder c ist injektiv und damit Isometrie, oder c ist periodisch und liefert eine Isometrie von $(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), dx^2)$ mit M für geeignetes $L > 0$.

Bemerkung. Jede zusammenhängende, eindimensionale Mannigfaltigkeit ist also diffeomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu $\mathbb{S}^1$.

Aufgabe 2 (*Minkowski-Modell und Poincaré-Modell von* $\mathbb{H}^n$)
Sei $\langle \, , \, \rangle_L$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $\langle x, y\rangle_L = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i$, und

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle_L = -1,\ x^0 > 0\}.$$

Für $X, Y \in T_p\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei $g(X, Y) = \langle X, Y\rangle_L$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{H}^n, g)$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(b) Die Abbildung $I(x) = -e_0 - 2\langle x+e_0, x+e_0\rangle_L^{-1}\,(x+e_0)$ ist ein Diffeomorphismus von $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ auf $\mathbb{H}^n$, und es gilt

$$F^*g = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Aufgabe 3 (*Poincaré-Modell und oberes Halbraum-Modell von* $\mathbb{H}^n$)
Betrachten Sie die n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned} (M, g) &= \Big(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2\Big), \\ (N, h) &= \Big(\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2\Big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Inversion I an der Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : |x + e_n| = \sqrt{2}\}$, also $I(x) = -e_n + 2|x + e_n|^{-2}(x + e_n)$, eine Isometrie $I : (N, d^h) \to (M, d^g)$ liefert. *Hinweis*: Dafür genügt es zu zeigen, i) dass **I ein Diffeomorphismus** ist und ii) dass $\mathbf{I^*g = h}$ gilt. Diese Bemerkung wird in der Vorlesung noch gerechtfertigt und darf hier verwendet werden.