
Aufgabe 1 (O'Neills Formel)

Sei $(\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion und X, Y lokale Vektorfelder auf M mit horizontalen Liften $\tilde{X}, \tilde{Y}$. Zeigen Sie:

$$R(g)(X, Y, Y, X) = R(\tilde{g})(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Y}, \tilde{X}) + \frac{3}{4}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v),$$

wobei P^v den vertikalen Teil des Vektors P in $T_p\tilde{M}$ bezeichne.

Aufgabe 2 (Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$)

Sei $f : (M^n, g) \to (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ eine isometrische Immersion und $\nu : U \subset M \to T\mathbb{R}^{n+1}$ ein lokales Einheitsnormalen Vektorfeld längs f. Wir definieren: $h(p)(X_p, Y_p) = \langle A(p)(X(p), Y(p)), \nu\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, wobei A die zweite Fundamentalform sei. Zeigen Sie:

- Auf U ist h ist ein $\binom{2}{0}$ Tensor auf M. (h hängt von der Wahl von ν ab, genauer ist es nur bis auf Vorzeichen wohldefiniert.)
- Es gilt:
$$(\nabla h)(v, w, y) = (\nabla h)(w, v, y) = (\nabla h)(v, y, w)$$
(d.h. dass ∇h ist symmetrisch in allen drei Einträgen).

Aufgabe 3 (Jacobifelder und Konjugierte Punkte)

Sei $\gamma : [0, b] \to (M, g)$ eine Geodtische. Zeigen Sie: $\gamma(0)$ und $\gamma(b)$ sind NICHT konjugiert längs γ genau dann, wenn gilt: für alle $V \in T_{\gamma(0)}M$ und $W \in T_{\gamma(b)}M$ existiert ein Jacobi-Feld J längs γ mit $J(0) = V$ und $J(b) = W$.